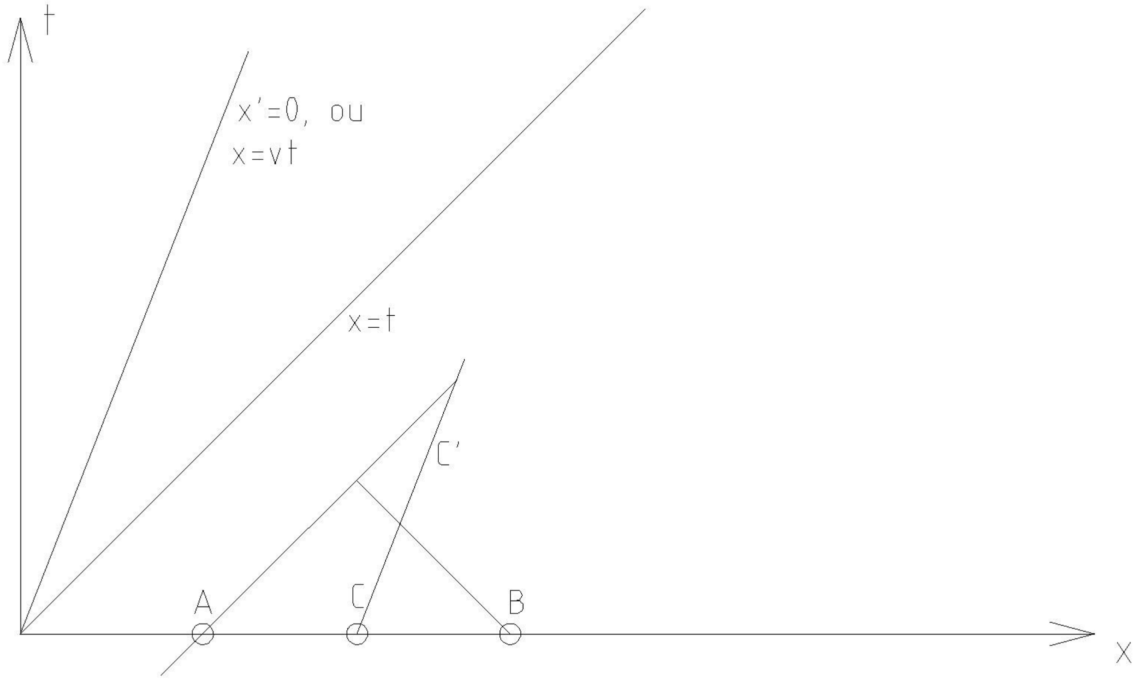
Paradoxo das gêmeas segundo a relatividade especial

Suponha um referencial se deslocando em linha reta em relação a outro, na direção x, com velocidade v. Se no instante t=0, as origens dos 2 referenciais coincidem, a origem do referencial móvel (x’ = 0) descreve uma trajetória no referencial estático descrita pela equação x = vt. A próxima figura mostra essa trajetória num gráfico distância x tempo do referencial estático.



Queremos descrever fenômenos da teoria da relatividade. Para que as linhas dos gráficos possam ser melhor visualizadas, sem praticamente coincidir com os eixos coordenados, usaremos unidades tais que a velocidade da luz = 1. Dessa forma, nesse mesmo gráfico a velocidade da luz é representada por uma linha a 45 graus (t = x).

Os pontos A e B representam 2 eventos simultâneos, correspondendo a t = 0. Para conceituar mais precisamente o que entendemos por simultaneidade, inserimos um ponto C de modo que a distância AC seja a mesma que CB. Quando A e B emitirem um sinal luminoso, e C recebe-los no mesmo instante, esse será o critério para dizer que A e B estão sincronizados. Se cada um deles tiver um relógio, estes estarão sincronizados caso marquem exatamente a mesma hora no momento em que emitirem o sinal. As linhas a 45 graus representam a velocidade da luz para a esquerda e direita, já que ela é 1 em nossas unidades.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao referencial móvel, para t’ = 0 e pontos A’, B’ e C’ numericamente com o mesmo valor de A, B e C, já que ambos são referenciais inerciais.

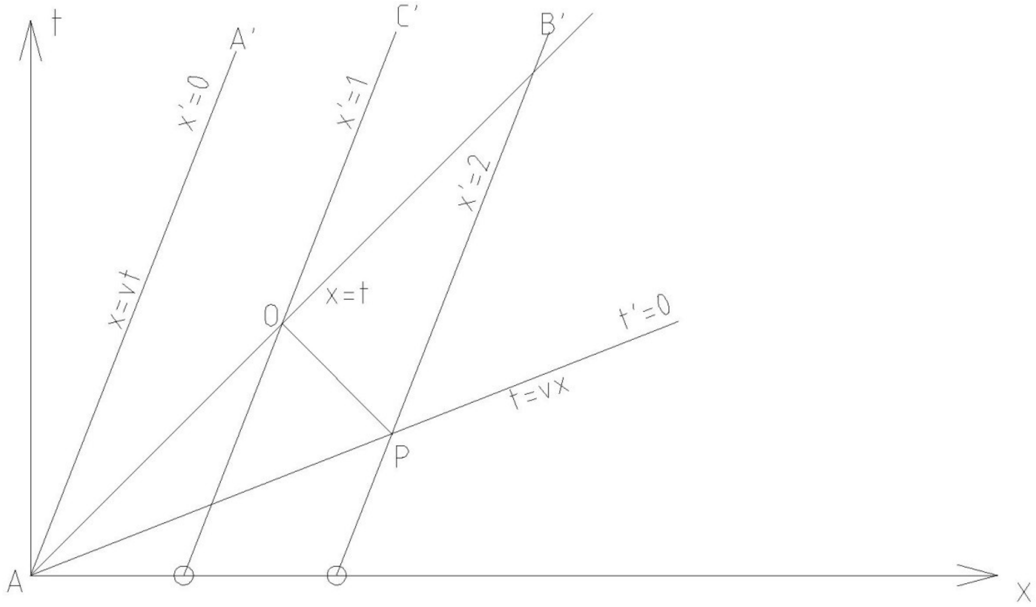
Entretanto, se quando t = 0, os pontos A, B e C tiverem as mesmas coordenadas numéricas de A’, B’ e C’, o ponto C’ não receberá os sinais de luz emitidos por A e B ao mesmo tempo. Como

C’ está se deslocando para a direita, o sinal de B chegará antes. Ou seja, pela definição de simultaneidade apresentada, embora A’ e B’ sejam eventos simultâneos no referencial móvel, já que C’ recebe o sinal deles ao mesmo tempo, e A e B sejam também simultâneos no referencial fixo, A e B não são simultâneos no referencial móvel.

Para ilustrar o que acontece, o referencial fixo poderia ser um trem parado na estação, e cada vagão tendo um relógio, todos eles sincronizados. O referencial móvel um trem chegando em velocidade, sem parar na estação. Cada vagão do referencial móvel também tem um relógio, todos eles sincronizados. Sabendo o cálculo da velocidade e da distância entre os trens, um dispositivo automático é programado para, a partir de cada vagão, tirar fotos dos vagões do outro trem num determinado instante, em que os trens estarão emparelhados. Como os relógios do trem parado estão sincronizados, nessa mesma hora as fotos são tiradas em todos os vagões. Essa foto mostrará que os relógios do trem em movimento não marcam exatamente a mesma hora, mesmo estando sincronizados entre si pelo pessoal desse trem. O mesmo vale ao reverso, com a foto sendo tirada do trem em movimento no momento do emparelhamento. Os relógios do trem parado na estação estarão dessincronizados entre si.

Assim como a posição da origem do eixo móvel, ou seja $x' = 0$, é representada pela reta $x = vt$ no gráfico, como seria a linha em que $t' = 0$, na qual estariam A’ e B’ por exemplo?

No próximo gráfico, as linhas $x' = 0$, $x' = 1$ e $x' = 2$ representam os 3 pontos A’, C’ e B’ respectivamente, igualmente espaçados. Repetindo o processo de sincronização, um sinal é enviado de A ($x'=0$) para a direita. Como a velocidade da luz é a reta a 45 graus, a trajetória do sinal é representada pelo segmento AO. O ponto P mostra o momento em que um sinal de B’ ($x'=2$) é enviado para a esquerda (uma reta a 45 graus para a esquerda descreve esse sinal). Para determinar o ponto P devemos primeiro observar que o ponto O é a intercessão das retas $t = (x-1)/v$ (correspondente a $x'=1$) e $t=x$. Portanto, $O = [1/(1-v), 1/(1-v)]$. P é a intercessão de $t = (x-2)/v$ (correspondente a $x'=2$) com a reta PO. Mas esta tem coeficiente angular de -1 e contém o ponto $[1/(1-v), 1/(1-v)]$. Portanto $t = 2/(1-v) - x$. Substituindo, temos o valor de P $[2/(1-v^2), 2v/(1-v^2)]$. Dividindo a coordenada t pela x obtemos simplesmente v. Como na origem por definição $t'=0$, e a determinação de P pode ser generalizada para quaisquer A’, C’ e B’ igualmente espaçados, a reta $t = vx$, unindo P à origem corresponde a todos os eventos onde $t'=0$.



Assim temos a transformação de qualquer evento no referencial móvel que esteja na origem (x'=0) e para qualquer instante do tempo. Esse evento ocorre no referencial fixo no ponto x = vt. E para qualquer evento que ocorra em um ponto x dado, no instante zero do referencial móvel (t'=0). O tempo medido no referencial fixo será t = vx.

E se quisermos saber de um evento num ponto x e t qualquer? Qual o x', t' correspondente no referencial móvel para ele? Ou dado um x', t' no referencial móvel, qual o correspondente x, t no referencial fixo?

Sabemos que quando x'=0, x=vt. Ou x-vt = 0 = x'. Façamos uma hipótese de que para um caso geral, em que x' pode também ser diferente de zero, $x' = (x-vt).f(v^2)$. E que para t' num caso geral, $t'=(t-vx).g(v^2)$. Nos 2 casos, caso x'=0 ou t'=0, temos que x =vt e t = vx, valendo essa equação para esses casos já vistos. A dependência de v^2, e não de v simplesmente, permite que seja a velocidade para a esquerda ou direita, negativa ou positiva, o fator não mude.

A primeira exigência que uma transformação de coordenadas deve satisfazer é que a velocidade da luz é constante. Assim um raio de luz, expresso como x=t no referencial fixo, deve corresponder a x'=t' no referencial móvel. (A velocidade da luz = 1 nas nossas unidades). $X'=t' \Rightarrow (x-vt).f(v^2) = (t-vx).g(v^2)$, e como também $x=t \Rightarrow f(v^2) = g(v^2)$.

A segunda exigência do princípio da relatividade é a simetria em relação a quem se move ou está parado. Substituindo v por –v, o referencial móvel pode considerar que é o (dito) referencial fixo quem se move na direção oposta e é ele que está fixo. Assim as equações:

$x = (x'+vt').f(v^2)$ e $t=(t'+vx').f(v^2)$ também são válidas. (Usei também o resultado de que f = g).

Na primeira equação: $x' = (x-vt).f(v^2)$, substituímos o x e o t pelos resultados da linha de cima.

$x' = ((x'+vt').f - v(t'+vx').f).f \Rightarrow x' = x'f^2 + vt'f^2 - vt'f^2 - v^2x'f^2$. Dois termos de sinais opostos se cancelam e nos termos restantes, o x' pode ser cortado:

$f^2 = 1 / (1-v^2)$, ou $f(v^2) = raiz(1 / (1-v^2))$.

As transformações ficam então:

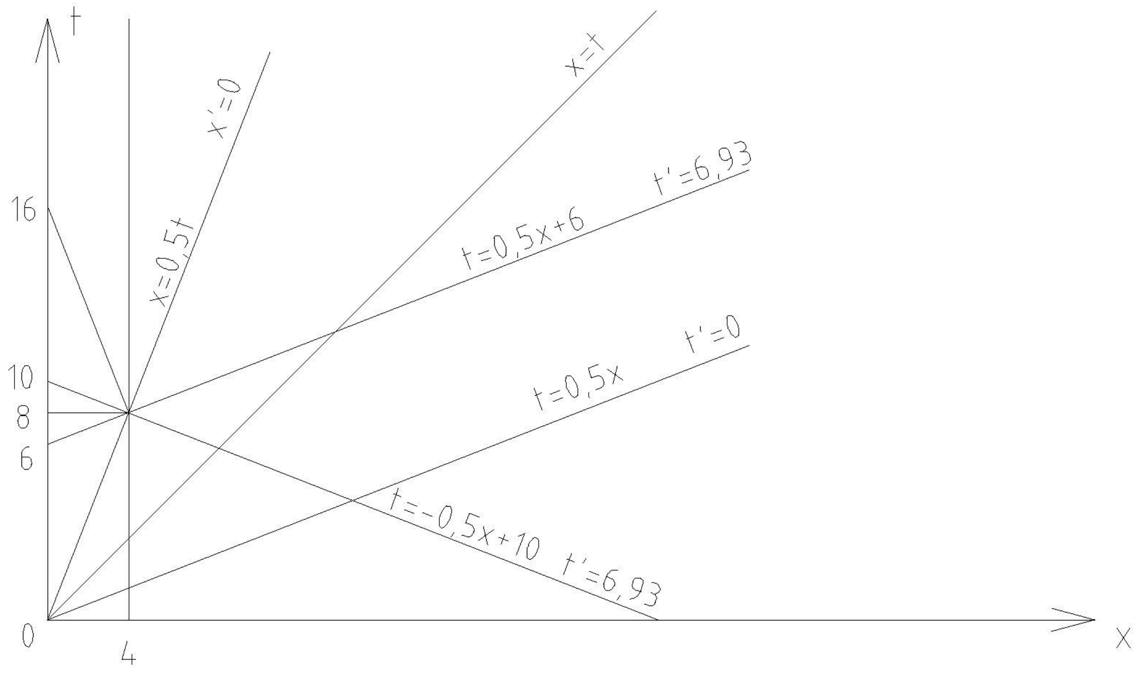
$x' = (x - vt) / raiz(1 / (1-v^2))$ e $t' = (t-vx) / raiz(1 / (1-v^2))$.

Nessas expressões a velocidade da luz = 1. Caso se trabalhe com unidades em que ela seja diferente da unidade, é preciso introduzi-la como c, preservando a coerência dimensional das fórmulas:

$x' = (x - vt) / raiz(1 / (1-v^2/c^2))$ e $t' = (t-vx/c^2) / raiz(1 / (1-v^2/c^2))$.

Paradoxo das gêmeas:

Sejam 2 irmãs gêmeas Rosália e Rosalí. Rosália fica na terra enquanto Rosalí parte em direção de Alfa Centauri num foguete, com velocidade constante, igual à metade da velocidade da luz. Do ponto de vista de Rosália, o gráfico tempo x distância está representado abaixo. Como ela está parada em seu referencial (a terra), sua trajetória é apenas no tempo, uma linha vertical a partir da origem. E para ela, Rosalí descreve uma linha reta inclinada, correspondente à sua velocidade constante. Como nas medições feitas a partir da terra, Alfa Centuri dista 4 anos luz, Rosália sabe que após 8 anos, Rosalí chegou lá, pois viaja à metade da velocidade da luz. Rosália também calcula, que como sua irmã esteve todo esse tempo em movimento, o relógio dela andou mais devagar, e portanto o total do tempo medido pela irmã viajante foi menor. O tempo decorrido no relógio de Rosalí = $8 \times raiz(1-v^2) = 8 \times raiz(1 - 0,25) = 8 \times raiz (0,75) = 6,93$ anos.



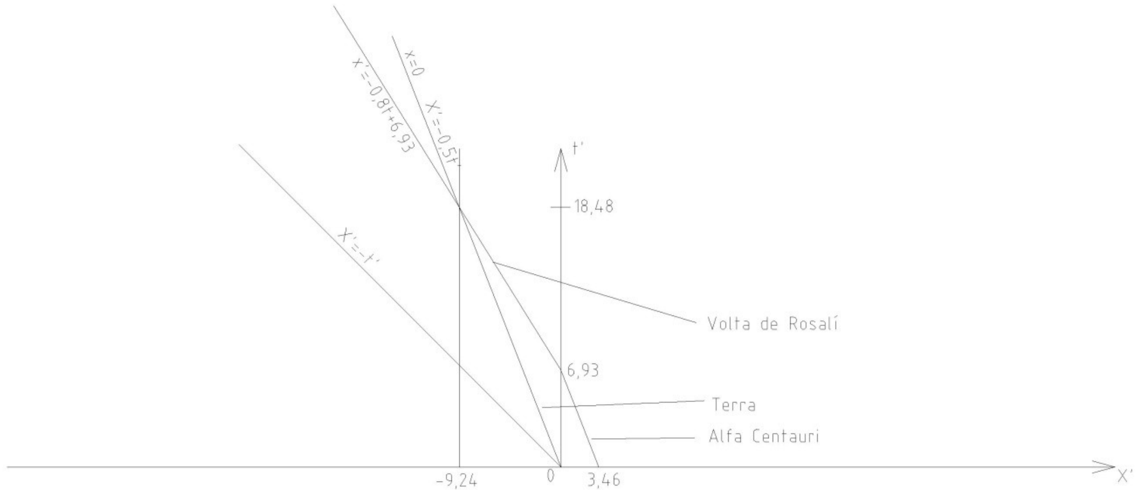
Se imediatamente ao chegar ao destino, Rosalí dá meia volta e retorna à terra com a mesma velocidade, os tempos calculados simplesmente dobram pois a distância de retorno é a mesma. Como mostrado no gráfico, Rosália se desloca em seu eixo vertical por mais 8 anos, e Rosalí, em seu relógio leva 6,93 anos para retornar. Quando compararem seus relógios na chegada, o de Rosália estará indicando 16 anos passados enquanto o de Rosalí marcará 6,93 x 2 = 13,86 anos.

O paradoxo estaria em que Rosalí poderia considerar que de seu ponto de vista, Alfa Centauro e a terra é que se deslocam. Como ela tem todo o direito de se sentir parada em seu foguete, é sua irmã que esteve todo esse tempo em movimento, devendo Rosália estar mais nova no reencontro. Afinal, do ponto de vista da relatividade, não há um referencial privilegiado que possa dizer que é o outro que se move. Não importa que um seja uma estrela e o outro um simples foguete. E não é possível que no reencontro cada uma veja a outra mais nova ao mesmo tempo!

Mas acontece que isso só é verdade durante todo o tempo em que as velocidades de ambas foram constantes. Quando Rosalí inverteu os motores e voltou, nesse instante e apenas nele, não está com velocidade constante e quebra-se a simetria com Rosália, que não mudou sua velocidade. O efeito da mudança de velocidade é alterar-se subitamente a sua visão do sincronismo dos relógios do referencial de Rosália. Rosalí continua vendo nesse instante o relógio de Alfa Centauri, sincronizado com o da terra, indicando que se passaram 8 anos. E no seu relógio 6.93 anos. Mas a sincronização dos relógios depende da velocidade relativa entre os observadores. Imediatamente antes da mudança de rota, Rosalí mede o relógio de Rosália na terra, nesse mesmo instante, segundo a reta t'=6,93 crescente para a direita (t = 0,5x + 6), e para x=0 (posição de Rosália), t = 6 anos. Assim, realmente passou menos tempo para Rosália até esse momento. Mas imediatamente após iniciar a viagem de retorno, essa medida passa a ser calculada pela reta t'=6,93 crescente para a esquerda: t = -0,5x + 10. E para a mesma posição de Rosália de x = 0, t = 10 anos!

Daí em diante, o raciocínio é o mesmo, com Rosalí calculando que a viagem levará mais 6 anos segundo o relógio de Rosália, e 6,93 anos para ela. Portanto no seu referencial, tanto na ida como na volta, enquanto está com velocidade constante, envelhece mais rápido que a irmã, que afinal é quem está se movendo em relação ao seu foguete! Mas na chegada, seu relógio marcará 13,86 anos e o de Rosália 16 anos. A solução do paradoxo é a quebra de simetria no momento do retorno, quando Rosalí viu o relógio de Rosália subitamente se adiantar em 4 anos.

Embora não seja possível fazer uma análise pela relatividade especial do ponto de vista de Rosalí, porque ela não mantém sua velocidade, podemos calcular tudo pelo referencial da sua viagem de ida por exemplo. Podemos analisar no gráfico abaixo esse referencial de ida. Para começar, a distância entre a terra e Alfa Centauri não é aqui 4 anos luz. Para esse referencial, os dois astros estão se movimentando à metade da velocidade da luz, e essa distância se contrai. D = 4 x raiz (1-v^2) = 4 x raiz(1-0.5^2) = 4 x raiz(0,75) = 3,46 anos luz.



A terra se afasta para a esquerda enquanto Alfa Centauri se aproxima da direita. Como Alfa Centauri se aproxima à metade da velocidade da luz, o relógio de Rosalí marcará t’ = 3,46 / 0,5 = 6,93 anos no momento do encontro. Quando Rosalí resolve retornar, ela passa a ter uma velocidade em relação ao referencial de cálculo. Assim, tudo se passa como se houvessem 2 estágios no foguete de Rosalí. Em um deles, ela volta à terra. Mas no outro que continua com velocidade inalterada, um processo computadorizado continua a fazer os cálculos das trajetórias e tempos de viagem. É esse o significado do referencial t’ do gráfico.

Qual a velocidade de Rosalí em relação à t’? Pela regra de composição de velocidades relativísticas, v = (u+w)/(1 + uw), onde u é a velocidade entre a terra e t’, e w a velocidade relativa entre a terra e Rosalí. Assim: v = (0,5 + 0,5) / (1 + 0,5*0,5) = 0,8.

Para t’, Rosalí chegará à terra no ponto de encontro entre as retas x’ = -0,5t’ e x’=-0,8(t’-6,93) mostradas no gráfico. Resolvendo esse sistema: x’ = -9,24 anos luz e t’ = 18,48 anos. Essa é a data registrada pelos relógios sincronizados ao referencial t’. Para saber o que marcam os relógios da terra nesse mesmo ponto e instante é preciso usar a transformação de Lorenz: t = (18,48 – 0,5*9,24)/raiz(1-0,5^2) = 16 anos. Exatamente como calculado anteriormente.

E o que marcam os de Rosalí? Quando iniciou sua viagem de volta, seu tempo já marcava 6,93 anos, o que era medido também por t’, pois ela estava parada até aquele momento nesse referencial. No referencial t’, o tempo restante de viagem é portanto 18,48 – 6,93 anos = 11,55 anos. Aplicando a transformação de Lorenz para esse tempo, durante o qual houve o deslocamento de 9,24 anos luz: (11,55 – 0,8*9,24)/raiz(1-0,8^2) = 6,93 anos. O tempo no relógio de Rosalí será portanto de 2 x 6,93 = 13,86 anos.

Isso mostra que tanto faz calcular pelo referencial da terra, como do foguete que se afasta dela. A gêmea que vai e volta envelhece menos que a que fica.

É bom ressaltar que embora não exista paradoxo, no sentido de que não há uma inconsistência ou contradição na teoria, é um tanto espantoso que a passagem do tempo seja afetada pelo movimento acelerado.