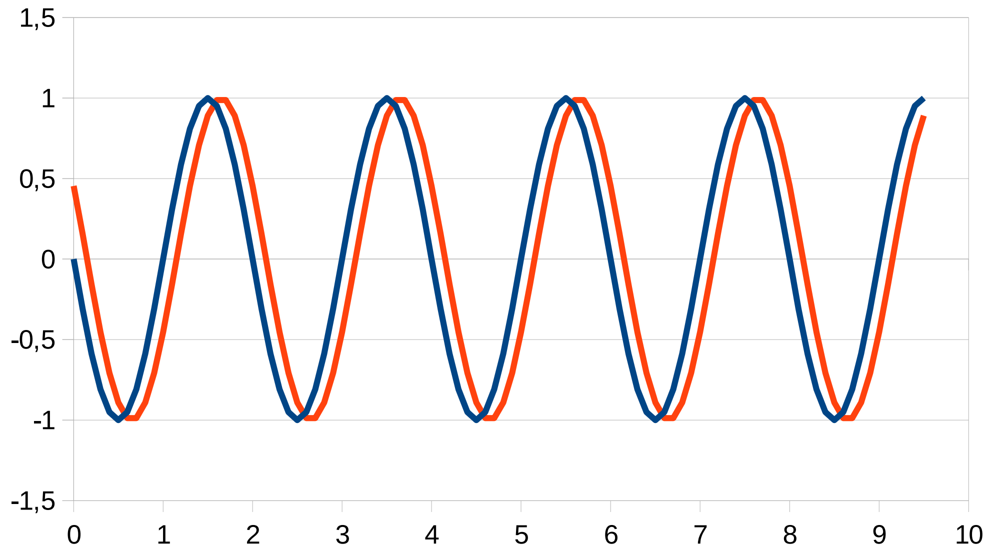
1) Ondas senoidais

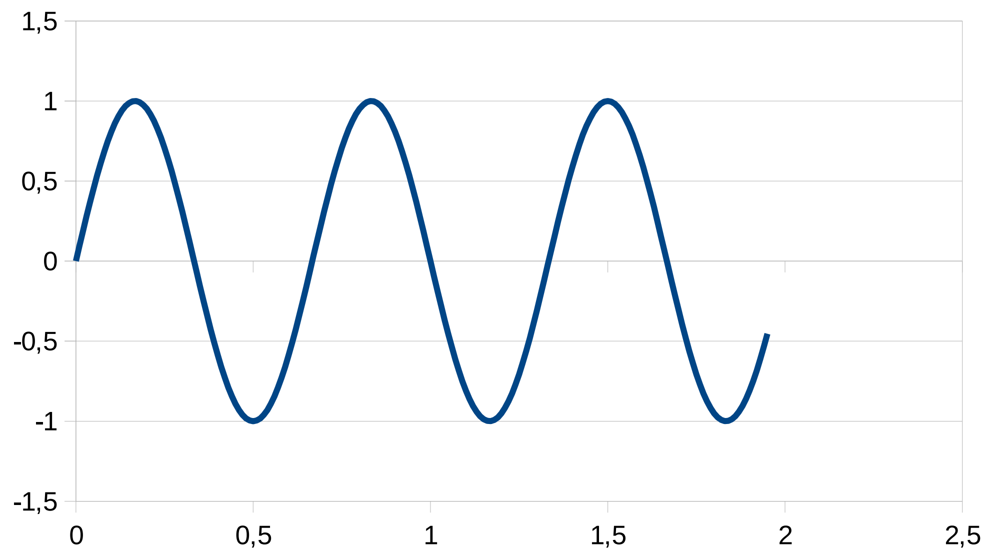
Uma equação do tipo:

$f = A\text{sen}((2\pi/\lambda)(x-vt))$ expressa uma onda de formato senoidal se propagando para a frente na direção x, com uma velocidade v. Os parâmetros A e λ são respectivamente amplitude máxima e comprimento da onda, como mostrado no exemplo abaixo.

Para A = 1, λ = 2 e v = 3, o gráfico em azul representa uma ondulação ao longo do eixo x quanto t = 1s, e em vermelho quando t = 1.05s. Portanto podemos dizer que a onda está se movendo para a direita.



Mas também é possível escolher um determinado ponto do eixo x e monitorar a altura da onda com o passar do tempo. O gráfico abaixo mostra como essa altura oscila no ponto x = 1, entre 0 e 2 s.



O gráfico acima sugere uma explicação alternativa. Em vez de uma onda se deslocando para a direita, o que ocorre são oscilações senoidais em função do tempo em cada ponto. Como todos os pontos oscilam com a mesma frequência, produz-se o efeito visual de uma onda se deslocando, porque a defasagem aumenta de forma constante.

Uma terceira perspectiva parte do princípio de que todo o movimento é relativo. No caso de ondas no mar por exemplo, se um surfista se desloca com a mesma velocidade da onda, sua posição entre a crista e o vale é constante durante o trajeto. Abstraindo da visão da praia e da resistência do ar, pode se considerar parado. Não há nem uma onda se deslocando, nem uma altura oscilante em cada ponto. Sua onda é tão estática como uma duna de areia.

Se x' corresponder à uma distância fixa em relação ao barco, e x à distância de um observador parado fora dele, a relação entre as distâncias medidas por cada referencial é: $x = x' + vt$. Substituindo na equação:

$$f = A\mathrm{sen}((2\pi/\lambda)(x - vt)) \Rightarrow f = A\mathrm{sen}((2\pi/\lambda)(x' + vt - vt)) = A\mathrm{sen}((2\pi/\lambda)x')$$

Essa equação expressa um panorama estático de ondulações, pois não é mais função do tempo.

2) Ondas numa corda

Suponhamos uma corda esticada vibrando com pequena amplitude como num violão. Convencionamos a direção da corda como o eixo x, e a direção dos deslocamentos transversais correspondentes às oscilações, o eixo y. Isolemos para análise um pequeno segmento de massa m, entre x_0 e $x_0 + \Delta x$ num instante t. As forças atuantes no segmento, se desprezarmos a gravidade, são as tensões à esquerda e à direita, cada uma tangente à curva no ponto. O somatório dessas forças corresponde à aceleração, já que esta não é uma situação de equilíbrio:

$\mathbf{T}_d + \mathbf{T}_e = m\mathbf{a}$

$T_{dy} - T_{ey} = ma_y$
$T_{dx} - T_{ex} = ma_x$

$T_{dy} / |\mathbf{T}_d| = \text{sen}(\theta_d)$ e $T_{ey} / |\mathbf{T}_e| = \text{sen}(\theta_e)$
$T_{dx} / |\mathbf{T}_d| = \cos(\theta_d)$ e $T_{ex} / |\mathbf{T}_e| = \cos(\theta_e)$

A expansão em série do seno até o segundo termo é igual à da tangente. Como esta última representa a derivada da curva no ponto podemos fazer a substituição já que a amplitude das oscilações é considerada pequena. Pelo mesmo critério, o cosseno é aproximado para 1:

$T_{dy} / |\mathbf{T}_d| = \tan(\theta_d)$ e $T_{ey} / |\mathbf{T}_e| = \tan(\theta_e)$ => $|\mathbf{T}_d|\partial y/\partial x|_{(x0+\Delta x)} - |\mathbf{T}_e|\partial y/\partial x|_{(x0)} = ma_y$
$T_{dx} / |\mathbf{T}_d| = 1$ e $T_{ex} / |\mathbf{T}_e| = 1$ => $|\mathbf{T}_d| - |\mathbf{T}_e| = ma_x$

Substituindo $|\mathbf{T}_e| = |\mathbf{T}|$ e $|\mathbf{T}_d| = |\mathbf{T}| + \Delta T$, e dividindo por Δx:

$|\mathbf{T}|(\partial y/\partial x|_{(x0+\Delta x)} - \partial y/\partial x|_{(x0)})/\Delta x + (\Delta T/\Delta x)\partial y/\partial x|_{(x0+\Delta x)} = m(\partial^2 y/\partial t^2)/\Delta x$
$\Delta T/\Delta x = ma_x/\Delta x$

No segundo termo do lado esquerdo da primeira equação, a derivada é muito pequena (mesmo motivo → pequenas oscilações) tornando-o desprezível frente ao primeiro. Fazendo o limite quando $\Delta x \to 0$ e definindo a densidade linear $\rho = m/\Delta x$

$\partial^2 y/\partial t^2 = (|\mathbf{T}|/\rho)\partial^2 y/\partial x^2$
$\partial^2 x/\partial t^2 = (1/\rho)\partial T/\partial x$

Para ondas em cordas considera-se a oscilação em x, representada na segunda equação muito menor que a oscilação em y, representada na primeira. Para isso basta que o material seja rígido o suficiente para que as variações de tensão resultem em deformações muito pequenas comparadas aos deslocamentos transversais.

A solução geral da equação em y é:
$y = f(u)$, tal que $u = k(x - vt)$, onde $v = (|\mathbf{T}|/\rho)^{(1/2)}$

pois

$\partial y/\partial x = k\partial f/\partial u$
$\partial^2 y/\partial x^2 = k^2\partial^2 f/\partial u^2$

$\partial y/\partial t = -kv\partial f/\partial u$
$\partial^2 y/\partial t^2 = k^2 v^2\partial^2 f/\partial u^2$

onde se presume que y é duplamente diferenciável em todos os pontos em relação a x e t.

Uma onda senoidal onde $y = A\text{sen}(k(x - vt))$ é um exemplo de uma função desse tipo, entretanto não é a única. A função não precisa nem mesmo ser periódica. Basta que, como no exemplo do surfista, um observador com velocidade v, veja uma forma na corda invariante no tempo.

A energia cinética de um segmento da corda num dado ponto x_0 e instante t_0 será então:
$E_k = (1/2)\rho(\partial y/\partial t)^2 = (1/2)\rho k^2v^2(\partial f/\partial u)^2$

Entrando com a expressão para $\partial y/\partial x$, e como $v = (|\mathbf{T}|/\rho)^{(1/2)}$:
$E_k = (1/2)|\mathbf{T}|(\partial y/\partial x)^2$

A energia cinética será zero nos pontos em que a corda for paralela ao eixo x, e máxima quando sua inclinação em relação à esse eixo for máxima. Quando:

$E_k = \max \Rightarrow (\partial y/\partial x) = \max, \partial^2y/\partial x^2 = k^2f''(u) = 0 \Rightarrow f''(u) = 0$
$E_k = \min \Rightarrow (\partial y/\partial x) = 0, \Rightarrow y = \max$ ou $y = \min \Rightarrow f(u) = \max$ ou min.

A energia potencial é de natureza elástica, e é função da maior ou menor tensão na corda em cada ponto e instante. Vamos considerar que em cada ponto a soma das energias potencial e cinética é constante.

A energia elástica num corpo em tensão uniaxial como uma corda é:
$E_p = (1/2)T\varepsilon$

onde ε é a deformação elástica e T a tensão.

Pela lei de Hooke:
$T = S\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = T/S$

onde S é o módulo de elasticidade.

Logo, a energia potencial elástica pode ser expressa como:
$E_p = (1/2)T^2/S$

A energia total é então:
$E_{tot} = (1/2)T^2/S + (1/2)|\mathbf{T}|(\partial y/\partial x)^2$

Derivando em relação a x e igualando a zero:
$(T/S)\, dT/dx + (1/2)(dT/dx)(\partial y/\partial x)^2 + |\mathbf{T}|(\partial y/\partial x)(\partial^2y/\partial x^2) = 0$

Os pontos extremos $T = \max$ e $T = \min$ correspondem a:
$\partial T/\partial x = 0$

Substituindo na equação acima, vemos que para essa condição:
$(\partial y/\partial x) = 0$ ou $(\partial^2y/\partial x^2) = 0$

$(\partial y/\partial x) = 0 \Rightarrow E_k = 0 \Rightarrow E_p$ max $\Rightarrow$ T max. É também o ponto mínimo ou máximo de y.

$(\partial^2y/\partial x^2) = 0 \Rightarrow E_k$ max $\Rightarrow E_p$ min $\Rightarrow$ T min.

3) Ondas eletromagnéticas

3.1) Equação geral de uma onda plana

As equações de Maxwell em forma diferencial são:

$\nabla.\mathbf{B} = 0$ (1)
$\nabla.\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ (2)
$\nabla x\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \mu_0\varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t$ (3)
$\nabla x\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ (4)

Numa região sem cargas ou correntes:

$\nabla.\mathbf{B} = 0$ (1a)
$\nabla.\mathbf{E} = 0$ (2a)
$\nabla x\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t$ (3a)
$\nabla x\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ (4a)

Diferenciando (3a) em relação ao tempo:

$\partial(\nabla x\mathbf{B})/\partial t = \mu_0\varepsilon_0\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$
$\nabla x(\partial\mathbf{B}/\partial t) = \mu_0\varepsilon_0\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$

Substituindo o valor de $\partial\mathbf{B}/\partial t$ de (4a):
$\nabla x(\nabla x\mathbf{E}) = -\mu_0\varepsilon_0\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$

Usando o resultado do cálculo vetorial de que para qualquer vetor **V**:
$\nabla x(\nabla x\mathbf{V}) = \nabla.\mathbf{V} - \nabla^2\mathbf{V}$

Usando (2a):
$\nabla x(\nabla x\mathbf{E}) = -\nabla^2\mathbf{E}$

Logo:
$\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2 = (1/\mu_0\varepsilon_0)\nabla^2\mathbf{E}$

Com um procedimento similar, apenas eliminando **E** das equações em vez de **B**:
$\partial^2\mathbf{B}/\partial t^2 = (1/\mu_0\varepsilon_0)\nabla^2\mathbf{B}$

Uma onda do tipo que foi deduzido para as cordas é solução para essa equação, o que pode ser visto se **E** e **B** forem apenas funções de x, e o gradiente se reduzir à derivada parcial em relação a x.

Substituindo os valores das constantes elétricas e magnéticas:
$\varepsilon_0 = 8{,}854187817 \times 10^{-12}\ C^2N^{-1}m^{-2}$
$\mu_0 = 1{,}2566 \times 10^{-6}\ C^2N^{-1}m^{-2}H/m$

$(1/\mu_0\varepsilon_0)^{(1/2)} = 2{,}998 \times 10^8$ m/s = c (velocidade da luz).

Logo as equações de onda, que expressam os campos elétricos e magnéticos no vácuo, na ausência de cargas e correntes são:

$\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2 = c^2\nabla^2\mathbf{E}$
$\partial^2\mathbf{B}/\partial t^2 = c^2\nabla^2\mathbf{B}$

É possível encontrar campos elétricos e magnéticos satisfazendo essas equações que não sejam ondas eletromagnéticas. Um exemplo trivial são campos estáticos. Mas a solução mais geral é uma onda, com algumas diferenças em relação ao caso das cordas:

$\mathbf{E} = \mathbf{E}(u)$, e $\mathbf{B} = \mathbf{B}(u)$, onde $u = \mathbf{k.x} - \omega t + \theta$ e $\omega = |\mathbf{k}|c$, onde $\mathbf{k}$ é um vetor constante e θ é uma constante.

A expressão para u significa:
$u = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \theta$ e $|\mathbf{k}| = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{(1/2)}$

Para um determinado instante t fixo, e para cada valor de u, ela é a equação de um plano. $\mathbf{E}(u)$ e $\mathbf{B}(u)$ são constantes nesse plano, e $\mathbf{k}$ é um vetor normal a ele. Por isso é chamada solução de onda plana.

Testando a solução para os componentes de $\mathbf{E}$:

$\partial E_x/\partial t = (\partial E_x/\partial u)\partial u/\partial t = -\omega(\partial E_x/\partial u)$
$\partial^2 E_x/\partial t^2 = \omega^2(\partial^2 E_x/\partial u^2) = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)c^2(\partial^2 E_x/\partial u^2)$

$\partial E_x/\partial x = (\partial E_x/\partial u)\partial u/\partial x = k_x(\partial E_x/\partial u)$
$\partial^2 E_x/\partial x^2 = k_x^2(\partial^2 E_x/\partial u^2)$

De modo similar para as derivadas em relação a y e z, assim:
$\nabla^2 E_x = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)(\partial^2 E_x/\partial u^2)$ => verificando a equação. Da mesma forma para E_y, E_z e para os componentes de $\mathbf{B}$

Os vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são perpendiculares para essa solução pois :
$\nabla \mathrm{x} \mathbf{E} = (\partial E_y/\partial z - \partial E_z/\partial y \,,\, \partial E_z/\partial x - \partial E_x/\partial z \,,\, \partial E_x/\partial y - \partial E_y/\partial x)$ =>

$\nabla \mathrm{x} \mathbf{E} = (k_z(\partial E_y/\partial u) - k_y(\partial E_z/\partial u) \,,\, k_x(\partial E_z/\partial u) - k_z(\partial E_x/\partial u) \,,\, k_y(\partial E_x/\partial u) - k_x(\partial E_y/\partial u))$ =>

$\nabla \mathrm{x} \mathbf{E} = -(1/\omega)(k_z(\partial E_y/\partial t) - k_y(\partial E_z/\partial t) \,,\, k_x(\partial E_z/\partial t) - k_z(\partial E_x/\partial t) \,,\, k_y(\partial E_x/\partial t) - k_x(\partial E_y/\partial t))$ =>

$\nabla \mathrm{x} \mathbf{E} = (1/\omega)(\mathbf{k} \mathrm{~x~} \partial \mathbf{E}/\partial t) = (1/\omega)\partial(\mathbf{k} \mathrm{~x~} \mathbf{E})/\partial t$

Pela equação (4) de Maxwell:
$\nabla \mathrm{x} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ => $-(1/\omega)\mathbf{k} \mathrm{~x~} \mathbf{E} = \mathbf{B}$

Portanto $\mathbf{B}$ é perpendicular a $\mathbf{E}$ e $\mathbf{k}$.

Como $\nabla.\mathbf{E} = 0$:
$\partial E_x/\partial x + \partial E_y/\partial y + \partial E_z/\partial z = k_x(\partial E_x/\partial u) + k_y(\partial E_y/\partial u) + k_z(\partial E_y/\partial u) = 0$ =>

$\mathbf{k}.\partial \mathbf{E}/\partial u = -(1/\omega)\mathbf{k}.\partial \mathbf{E}/\partial t = -(1/\omega)\partial(\mathbf{k}.\mathbf{E})/\partial t = 0$

=> O produto escalar entre **k** e **E** é constante. Qualquer componente de **E** na direção do vetor **k**, não participa do movimento ondulatório, é um valor constante.

Baseado nessas exigências, podemos convencionar o eixo x como a direção de **k**, e uma solução geral para os vetores **E** e **B** será:

$\mathbf{E} = (A_{0x} , A_{0y}f(\mathbf{k.x} – \omega t + \theta_1) , A_{0z}g(\mathbf{k.x} – \omega t + \theta_2))$
$\mathbf{B} = (0 , -A_{0z}g(\mathbf{k.x} – \omega t + \theta_2) , A_{0y}f(\mathbf{k.x} – \omega t + \theta_1))$
$\mathbf{k} = k(1, 0, 0)$

$\mathbf{B.E} = \mathbf{B.k} = 0 \rightarrow$ **B** e **E** são perpendiculares, e **B** além disso é perpendicular a **k**.

Os ângulos entre as componentes z e y são em geral variáveis para um ponto x_0 determinado, por onde a onda passa:

$\tan(\varphi(\mathbf{E})) = (A_{0z} / A_{0y})g(kx_0 – \omega t + \theta_2) / f(kx_0 – \omega t + \theta_1)$
$\tan(\gamma(\mathbf{B})) = (-A_{0y} / A_{0z})f(kx_0 – \omega t + \theta_1) / g(kx_0 – \omega t + \theta_2)$

Esses ângulos, sempre defasados de 90 graus, são chamados ângulos de polarização. No caso particular em que f = g e $\theta_1 = \theta_2$ eles são constantes, e a onda é dita linearmente polarizada.

3.2) Efeito da mudança de referencial

Uma diferença, em relação às ondas vistas anteriomente, é que o recurso de mudança de referencial para "surfar" a onda não pode ser feito. Pela teoria da relatividade não há um um observador que viaje à velocidade da luz. E qualquer que seja a velocidade relativa entre observadores, cada um deles perceberá uma onda com a mesma velocidade c.

Entretanto, para o caso de uma onda de formato senoidal, mesmo não alterando sua velocidade, algo se altera na onda com uma mudança de referencial.

Se para um observador O a onda eletromagnética se propaga na direção x, e o campo elétrico oscila na direção y, a onda pode ser descrita como:
$E = E_0 sen(kx – \omega t)$

A função retorna o mesmo valor quando o argumento é somado a 2π, o que significa que:

Para um dado t:
Se $k = 2\pi/\lambda \Rightarrow E(t,x) = E(t,x+\lambda) \Rightarrow \lambda$ é o comprimento da onda.

Para um dado x:
Se $\omega = kc = 2\pi c/\lambda \Rightarrow E(t,x) = E(t,t+\lambda/c) \Rightarrow \lambda/c$ é o período e c/λ a frequência.

Resultando em
$E = E_0 sen((2\pi/\lambda)(x- ct))$

Já para um observador O', que se desloca com velocidade v na direção x em relação a O, a mudança de referencial não envolve apenas x, mas também t, conforme as transformações de Lorentz:

$x' = \gamma(x – vt)$ e $t' = \gamma(t – vx/c^2) \Rightarrow x = \gamma(x' + vt')$ e $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$

A equação fica então:

$E_y' = E_0 sen((2\pi/\lambda)\gamma(x' + vt' – c(t' + vx'/c^2)) = E_0 sen(((2\pi/\lambda)\gamma)((1 - v/c)x'- (1 - v/c)ct') = E_0 sen(((2\pi/\lambda)\gamma)((1 - v/c)(x'- ct'))$

Como $\gamma = 1 / (1 – v^2/c^2)^{(1/2)} = 1 /((1+v/c)^{(1/2)}(1-v/c)^{(1/2)})$

$E_y' = E_0\text{sen}((2\pi/\lambda)((1 - v/c)/(1+v/c))^{(1/2)}(x' - ct'))$

Como pode ser visto, a velocidade da onda eletromagnética não se altera com a mudança de referencial. Mas como O' é um referencial tão válido como O, a equação da onda deve ser:

$E_y' = E_0\text{sen}((2\pi/\lambda')(x' - ct'))$

Logo o comprimento de onda se altera:
$\lambda' = \lambda((1+v/c)/(1-v/c))^{(1/2)}$

Para O, se $v > 0$, O' está seguindo na mesma direção da onda. Nesse caso o comprimento de onda aumenta. Se $v < 0$, o comprimento de onda diminui.

Na verdade, um efeito semelhante acontece com as ondas do mar, se substituirmos o surfista por alguém nadando transversalmente às ondas. Mesmo que não consiga atingir a velocidade das ondas, se o nadador vai no mesmo sentido, o intervalo de tempo entre cristas sucessivas aumenta. Se vai no sentido contrário ele diminui. Só que o efeito é apenas no período das oscilações percebidas, o comprimento da onda não muda.

No caso das ondas eletromagnéticas, esse período também muda, pois na equação:
$E_y = E_0\text{sen}((2\pi/\lambda)(x - ct))$,

para um mesmo ponto $x = x_0$, o valor de E_y para $t = 0$ é:
$E_0\text{sen}((2\pi/\lambda)x_0)$

E quando $t = \lambda/c$:
$E_0\text{sen}((2\pi/\lambda)(x_0 - \lambda)) = E_0\text{sen}((2\pi/\lambda)(x_0) - 2\pi) = E_0\text{sen}((2\pi/\lambda)x_0)$

Portanto esse é o período entre mesmos valores de amplitude num dado ponto. Como a mudança de referencial afeta o valor de λ, também afeta o período na mesma proporção.

3.3) Energia e momento de uma onda plana

Uma carga q, sob o efeito combinado dos campos elétrico e magnético de uma onda plana, é sujeito à força de Lorentz:
$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$

e a onda perde uma parte de sua energia exercendo um trabalho sobre a carga. Para um pequeno deslocamento $\Delta\mathbf{x}$ essa perda é:
$\Delta W = -q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}).\Delta\mathbf{x}$

Convencionando o vetor **k** na direção x, como o campo magnético é perpendicular a **k**, não há componentes de **B** na direção x e a expressão acima aberta em seus componentes fica:

$\Delta W = -q((E_x,E_y,E_z) + (v_yB_z - v_zB_y , -v_xB_z , v_xB_y)).(\Delta x,\Delta y,\Delta z) =$

$-q(E_x\Delta x + (v_yB_z - v_zB_y)\Delta x + (E_y - v_xB_z)\Delta y + (E_z + v_xB_y)\Delta z)$
Dividindo ambos os lados pelo volume e por um pequeno intervalo de tempo, obtém-se a perda de energia por unidade de volume e tempo:

$(\Delta W_v/\Delta t) = -q(E_x\Delta x/\Delta t + (v_yB_z - v_zB_y)\Delta x/\Delta t + (E_y - v_xB_z)\Delta y/\Delta t + (E_z + v_xB_y)\Delta z/\Delta t) /\Delta x\Delta y\Delta z$

Tomando o limite quando os intervalos de tempo e volume tendem a zero:
$\partial W_v/dt = -\rho(E_xv_x + v_xv_yB_z - v_xv_zB_y + E_yv_y - v_xv_yB_z + E_zv_z + v_xv_zB_y) \Rightarrow$

Os componentes de **B** se anulam, só **E** exerce trabalho sobre as cargas.
$\partial W_v/dt = -\rho(E_xv_x + E_yv_y + E_zv_z) = -\rho\mathbf{v}.\mathbf{E}$

onde ρ é a densidade de carga.

O produto ρ**v** = **j** é a densidade de corrente.
$\partial W_v/dt = -\mathbf{j}.\mathbf{E}$ (5)

É possível obter, a partir de um campo eletromagnético genérico, outra expressão que também relacione a potência por unidade de volume ao termo **j.E**:

Fazendo o produto escalar da equação (3) de Maxwell por **E** e (4) por **B**:

$\mathbf{E}.\nabla\mathrm{x}\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\mathbf{E}.\partial\mathbf{E}/\partial t = \mu_0\mathbf{E}.\mathbf{j} + (1/2)\mu_0\varepsilon_0\partial(\mathbf{E}.\mathbf{E})/\partial t$
$\mathbf{B}.\nabla\mathrm{x}\mathbf{E} = -\mathbf{B}.\partial\mathbf{B}/\partial t = -(1/2)\partial(\mathbf{B}.\mathbf{B})/\partial t$

Subtraindo as equações:
$\mathbf{E}.\nabla\mathrm{x}\mathbf{B} - \mathbf{B}.\nabla\mathrm{x}\mathbf{E} = \mu_0\mathbf{E}.\mathbf{j} + (1/2)(\mu_0\varepsilon_0\partial E^2/\partial t + \partial B^2/\partial t)$

O lado esquerdo pode ser condensado em:
$-\nabla.(\mathbf{E}\mathrm{x}\mathbf{B})$, pois:

$\nabla.(E_yB_z - E_zB_y , E_zB_x - E_xB_z , E_xB_y - E_yB_x) =$

$= \partial_x(E_yB_z - E_zB_y) + \partial_y(E_zB_x - E_xB_z) + \partial_z(E_xB_y - E_yB_x) =$

$= B_z\partial_xE_y + E_y\partial_xB_z - B_y\partial_xE_z - E_z\partial_xB_y + B_x\partial_yE_z + E_z\partial_yB_x - B_z\partial_yE_x - E_x\partial_yB_z + B_y\partial_zE_x + E_x\partial_zB_y - B_x\partial_zE_y - E_y\partial_zB_x$

$= B_x(\partial_yE_z - \partial_zE_y) + B_y(\partial_zE_x - \partial_xE_z) + B_z(\partial_xE_y - \partial_yE_x) + E_x(\partial_zB_y - \partial_yB_z) + E_y(\partial_xB_z - \partial_zB_x) + E_z(\partial_yB_x - \partial_xB_y)$

$= \mathbf{B}.(\nabla\mathrm{x}\mathbf{E}) - \mathbf{E}.(\nabla\mathrm{x}\mathbf{E})$

Substituindo e rearranjando os termos:
$(1/2)(\varepsilon_0\partial E^2/\partial t + (1/\mu_0)\partial B^2/\partial t) = -(1/\mu_0)\nabla.(\mathbf{E}\mathrm{x}\mathbf{B}) - \mathbf{E}.\mathbf{j}$

Portanto, comparando (5) e (6):
$(1/2)(\partial(\varepsilon_0 E^2 + (1/\mu_0)B^2)/\partial t) = -(1/\mu_0)\nabla.(\mathbf{E}\mathrm{x}\mathbf{B}) + \partial W_v/dt$ (7)

A interpretação de (7) é que num pequeno intervalo de tempo da passagem da onda por uma região do espaço, a variação da energia do campo eletromagnético ali presente é a soma do trabalho exercido sobre cargas eventualmente existentes mais o fluxo de energia para fora da região, ou seja da energia que segue levada pela onda.

A energia da onda eletromagnética por unidade de volume é então:
$(1/2)(\varepsilon_0 E^2 + (1/\mu_0)B^2)$

O termo:
$\mathbf{S} = (1/\mu_0)\mathbf{E}\mathrm{x}\mathbf{B}$

é chamado vetor de Poynting, sendo o momento da onda eletromagnética. Para isso entretanto, as definições de momento e energia como:
$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ e $E = \mathbf{p}^2/(2m)$

devem ser substituídos pelas expressões relativísticas. A divergência do momento se revela como um fluxo de energia. A demonstração disso é feita a seguir.

3.4) Momento e fluxo de energia

Vamos modelar um sistema constituído por um fluido em movimento. Pode ser compressível mas é irrotacional, de modo que numa porção pequena o suficiente, seu fluxo tenha uma direção definida. Nas vizinhanças de um determinado ponto, suponha-se uma caixa virtual com arestas Δa, Δb, Δc. E os eixos são orientados de forma que a velocidade do fluido esteja na direção perpendicular às faces definidas por Δb e Δc.

A energia relativística por unidade de volume do fluido é:
$E = \gamma\rho$

O fluxo de energia que atravessa uma das faces ΔbΔc é:
$\partial F_E/\partial t = \gamma\rho(\partial a/\partial t)\Delta b\Delta c = \gamma\rho v\Delta b\Delta c$

Pela face oposta também passa um fluxo de energia:
$\partial F_E'/\partial t = \gamma'\rho'v'\Delta b\Delta c$

A variação de energia na caixa por unidade de tempo é:
$\partial E/\partial t = (\gamma'\rho'v' - \gamma\rho v)\Delta b\Delta c$

Dividindo-se por ΔaΔbΔc obtém-se a variação de energia por unidade de tempo e volume:
$\partial E_v/\partial t = (\gamma'\rho'v' - \gamma\rho v)/\Delta a$

Quando os deltas tendem a zero:
$\partial E_v/\partial t = \partial(\rho\gamma v)/\partial a$

Fazendo a derivada de produto, e lembrando que γ é uma função de v:
$\partial E_v/\partial t = \gamma v\partial\rho/\partial a + \rho\partial(\gamma v)/\partial a = \gamma v\partial\rho/\partial a + \rho(\gamma\partial v/\partial a + v\partial\gamma/\partial a)$

Mas:
$\partial\gamma/\partial a = (\partial\gamma/\partial v)(\partial v/\partial a) = v\gamma^3(\partial v/\partial a) \Rightarrow$

$\partial E_v/\partial t = \gamma v\partial\rho/\partial a + \rho\gamma(\partial v/\partial a)(1 + v^2\gamma^2) = \gamma v\partial\rho/\partial a + \rho\gamma^3(\partial v/\partial a)$

No primeiro termo, ∂ρ/∂a é uma derivada direcional, e para um vetor unitário na direção a:
$\partial\rho/\partial a = \nabla\rho\mathbf{.}(\mathbf{a}/a)$

Como v tem a mesma direção de a:
$\mathbf{a}/a = \mathbf{v}/v \Rightarrow$

$\partial E_v/\partial t = \gamma v\nabla\rho\mathbf{.}(\mathbf{v}/v) + \rho\gamma^3(\partial v/\partial a) = \gamma\mathbf{v}\mathbf{.}\nabla\rho + \rho\gamma^3(\partial v/\partial a)$

Para o segundo termo, estamos considerando uma direção definida de velocidade, perpendicular à face $\Delta b \Delta c$. Para um sistema de coordenadas com essa orientação, a derivada $\partial v/\partial a$ é também a divergência do vetor velocidade. Como a divergência é invariante por rotação de coordenadas:

$\partial v/\partial a = \mathbf{\nabla . v}$

Portanto:
$\partial E_v/\partial t = \gamma \mathbf{v.}\nabla\rho + \gamma^3 \rho \mathbf{\nabla . v}$

Por sua vez o momento relativístico por unidade de volume é:
$\mathbf{p} = \gamma\rho\mathbf{v}$

A divergência do momento por unidade de volume é:
$\mathbf{\nabla . p} = \mathbf{\nabla .}(\gamma\rho\mathbf{v}) = \partial(\gamma\rho v_x)/\partial x + \partial(\gamma\rho v_y)/\partial y + \partial(\gamma\rho v_z)/\partial z$

Expandindo a primeira componente:
$\partial(\gamma\rho v_x)/\partial x = (\gamma v_x)\partial\rho/\partial x + \rho\partial(\gamma v_x)/\partial x$

Como $\partial(\gamma v_x)/\partial x = \gamma^3(\partial v_x/\partial x)$ =>

$\partial(\gamma\rho v_x)/\partial x = (\gamma v_x)\partial\rho/\partial x + \rho\gamma^3(\partial v_x/\partial x)$

Analogamente para os demais, resultando em:
$\mathbf{\nabla . p} = (\gamma v_x)\partial\rho/\partial x + \rho\gamma^3(\partial v_x/\partial x) + (\gamma v_y)\partial\rho/\partial y + \rho\gamma^3(\partial v_y/\partial y) + (\gamma v_z)\partial\rho/\partial z + \rho\gamma^3(\partial v_z/\partial z)$ =>

$\mathbf{\nabla . p} = \gamma\mathbf{v}.\nabla\rho + \gamma^3\rho\mathbf{\nabla . v}$

Portanto a variação de energia por unidade de volume é igual à divergência do momento.