Coordenadas polares e relatividade

As coordenadas de Minkowski usam para as 4 dimensões da relatividade restrita, um instrumental algébrico bem semelhante às coordenadas cartesianas. A relatividade restrita pressupõe ausência de gravidade, e qualquer referencial inercial é igualmente válido. Entretanto, assim como é possível mapear o mesmo espaço usando coordenadas polares em vez de cartesianas, também é possível descrever o espaço-tempo modificando as coordenadas de Minkowski por meio de uma matemática similar à das coordenadas polares. Mas algumas coisas mudam fisicamente nesse caso.

1) Distâncias entre pontos em coordenadas cartesianas e polares no plano

Em coordenadas cartesianas no plano, a distância entre 2 pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é:
$s^2 = [x_1 – x_2]^2 + [y_1 – y_2]^2$

Quando a distância entre os pontos tende a zero:
$ds^2 = dx^2 + dy^2$

Isso é o produto escalar do vetor infinitesimal [dx , dy] por ele mesmo.

No caso de coordenadas polares no plano:

$s^2 = [r_1\cos(\alpha_1) – r_2\cos(\alpha_2)]^2 + [r_1\text{sen}(\alpha_1) – r_2\text{sen}(\alpha_2)]^2$

$s^2 = r_1^2\cos^2(\alpha_1) + r_2^2\cos^2(\alpha_2) + r_1^2\text{sen}^2(\alpha_1) + r_2^2\text{sen}^2(\alpha_2) – 2r_1r_2\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) –2r_1r_2\text{sen}(\alpha_1)\text{sen}(\alpha_2)$

$s^2 = r_1^2 + r_2^2 – 2r_1r_2(\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \text{sen}(\alpha_1)\text{sen}(\alpha_2)) = r_1^2 + r_2^2 – 2r_1r_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$

Transformando as variáveis: $r_2 = r$ e $r_1 = r + \Delta r$, $\alpha_1 – \alpha_2 = \Delta\alpha$

$s^2 = (r + \Delta r)^2 + r^2 – 2(r + \Delta r)r\cos(\Delta\alpha) = 2r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2 - 2r^2\cos(\Delta\alpha) – 2r\Delta r\cos(\Delta\alpha)$

Quando Δr e $\Delta\alpha$ são muito pequenos, ou seja quando s é muito pequeno:

$\cos(\Delta\alpha) = 1 – \Delta\alpha^2 / 2$

$\Delta s^2 = 2r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2 - 2r^2(1 – \Delta\alpha^2 / 2) – 2r\Delta r(1 – \Delta\alpha^2 / 2)$

$\Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2\Delta\alpha^2 + r\Delta r\Delta\alpha^2 / 2$

Quando Δs tende a zero, pode-se descartar o termo de segunda ordem:

$ds^2 = dr^2 + r^2d\alpha^2$

A distância infinitesimal pode ser expressa como um produto escalar do vetor infinitesimal por ele mesmo, desde que se redefina esse produto da forma abaixo, onde há a intermediação de uma matriz, chamada de tensor métrico:

$$ds^2 = \begin{matrix} dr & d\alpha \end{matrix} \quad * \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{matrix} \quad * \quad \begin{matrix} dr \\ d\alpha \end{matrix}$$

No caso de coordenadas cartesianas o tensor métrico é a identidade:

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

2) Distância entre pontos no espaço-tempo de Minkowski da relatividade restrita

Na teoria da relatividade restrita, um evento ocorrido num tempo t e distância d para um referencial inercial, tem valores diferentes para o observador que se desloca em relação a ele com velocidade constante, e na mesma direção da distância entre eles. Supondo que os relógios sejam sincronizados na origem (t = t' = 0 para d = d' = 0), as coordenadas seguem as transformações de Lorentz:

$t' = (t – vd) / (1 - v^2)^{(1/2)}$
$d' = (d – vt) / (1 - v^2)^{(1/2)}$

Nas equações acima usa-se unidades em que a velocidade da luz = 1.
Subtraindo os quadrados das equações:

$t'^2 – d'^2 = (t^2 + v^2d^2 – 2vdt) / (1 – v^2) - (d^2 + v^2t^2 – 2vdt) / (1 – v^2)$
$t'^2 – d'^2 = (t^2 + v^2d^2 - d^2 – v^2t^2) / (1 – v^2)$
$t'^2 – d'^2 = (t^2 - d^2 – v^2(t^2 - d^2)) / (1 – v^2)$
$t'^2 – d'^2 = t^2 – d^2$

Para 2 eventos, as transformações de Lorentz de cada um são:

$t'_1 = (t_1 – vd_1) / (1 – v^2)^{(1/2)}$ $t'_2 = (t_2 – vd_2) / (1 – v^2)^{(1/2)}$
$d'_1 = (d_1 – vt_1) / (1 – v^2)^{(1/2)}$ $d'_2 = (d_2 – vt_2) / (1 – v^2)^{(1/2)}$

O intervalo de tempo entre 2 eventos no referencial com velocidade v é:

$\Delta t'^2 – \Delta d'^2 = [(t_1 – vd_1) / (1 – v^2)^{(1/2)} - (t_2 – vd_2) / (1 – v^2)^{(1/2)}]^2 – [(d_1 – vt_1) / (1 – v^2)^{(1/2)} - (d_2 – vt_2) / (1 – v^2)^{(1/2)}]^2$

$\Delta t'^2 – \Delta d'^2 = [(\Delta t – v\Delta d) / (1 – v^2)^{(1/2)}]^2 – [(\Delta d – v\Delta t) / (1 – v^2)^{(1/2)}]^2$
$\Delta t'^2 = [(\Delta t^2 + v^2 \Delta d^2 - 2\Delta tv\Delta d) – (\Delta d^2 + v^2 \Delta t^2 - 2\Delta tv\Delta d] / (1 – v^2)$
$\Delta t'^2 – \Delta d'^2 = [(\Delta t^2 – \Delta d^2) - v^2 (\Delta t^2 - \Delta d^2)] / (1 – v^2) = \Delta t^2 – \Delta d^2$
$\Delta t'^2 – \Delta d'^2 = \Delta t^2 – \Delta d^2$

Essa diferença é portanto uma invariante no espaço-tempo, de forma análoga à distância entre 2 pontos no caso de mudanças de coordenadas no espaço. Só que pode ser positiva ou negativa.

Primeiro vamos examinar o caso em que é positiva.

Por exemplo, uma nave viaja entre a terra e alfa centauri, a 4 anos luz de distância. Suponhamos que haja uma base terrestre num planeta que orbita essa estrela, e seu calendário seja sincronizado com o da terra. Depois de 8 anos há um sinal enviado por essa base.

No referencial da terra, as coordenadas do evento são $t_1 = 8$, $d_1 = 4$

Cinco anos depois disso, outro sinal é enviado, agora a partir da terra

No mesmo referencial da terra, as coordenadas do segundo evento são $t_2 = 13$, $d_2 = 0$

$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta d^2 = (t_2 - t_1)^2 - (d_2 - d_1)^2 = 25 - 16 = 9$

Para que uma nave presencie os 2 eventos, deve partir de alpha centauri no primeiro evento e viajar para a terra com a velocidade $v = \Delta d/\Delta t = (4/5)$ (anos-luz)/ano;
Nesse caso, no referencial da nave, $\Delta d' = 0$, já que ambos os eventos ocorrem para $d' = 0$. Afinal, do ponto de vista da nave, alfa centauri se afastou, enquanto a terra se aproximou. Ela ficou parada.

$\Delta\tau^2 = \Delta t'^2 - \Delta d'^2 = 9 \quad => \quad \Delta\tau = \Delta t' = 3$ anos

O tempo próprio corresponde à nossa ideia intutiva de tempo, sendo o intervalo decorrido entre eventos locais, onde está o calendário e/ou relógio, no caso a nave.

Agora vejamos exemplos em que é negativa.

Nesse caso em vez do tempo próprio, trabalha-se com a distância no espaço-tempo, que é a mesma expressão com sinal trocado.

$\Delta s^2 = \Delta d^2 - \Delta t^2$

No exemplo anterior isso acontece se por exemplo o sinal enviado pela terra, correspondente ao segundo evento, ocorrer 3 anos depois do primeiro, em vez de 5.

$\Delta s^2 = -\Delta\tau^2 = \Delta d^2 - \Delta t^2 = (d_2 - d_1)^2 - (t_2 - t_1)^2 = 16 - 9 = 7$

Não há como uma nave fazer o trajeto entre esses eventos, pois sua velocidade deveria ser $v = \Delta d/\Delta t = 4/3$ anos luz/ano => maior que a velocidade da luz.

Entretanto é possível escolher um referencial em que os eventos que ocorreram com uma defasagem de 3 anos, sejam para ele simultâneos! Basta exigir que $t_2' - t_1' = 0$
$\Delta s^2 = (d_2' - d_1')^2 - 0 = 7 => \Delta d = 2{,}65$ anos luz.

Usando a transformação de Lorentz para t' e tomando o instante do primeiro sinal como zero dos tempos, encontramos a velocidade necessária para tornar esses eventos simultâneos em seu referencial:
$t' = (t - vd) / (1 - v^2)^{(1/2)} => 0 = (3 - 4v)/(1 - v^2)^{(1/2)} => v = 3/4$ (anos luz)/ano

Verificando para d':
$d' = (d - vt) / (1 - v^2)^{(1/2)} => d' = (4 - 3(3/4)) / (1 - (3/4)^2)^{(1/2)} = 2{,}65$ anos luz

Essa distância entre pontos do espaço-tempo, feita ao mesmo tempo, torna-se simplesmente uma distância no espaço, e é chamada de distância própria.

De forma análoga às coordenadas cartesianas e polares, há um tensor métrico para as distâncias espaço-temporais.

Extendendo as coordenadas coordenadas cartesianas para 3D:

$\Delta d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 =>$

$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$

Para dois eventos infinitamente próximos:

$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

O que pode ser escrito em forma matricial de forma análoga à distância entre pontos em coordenadas cartesianas:

$$ds^2 = \begin{bmatrix} dt & dx & dy & dz \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

Essa matriz caracteriza a métrica de Minkowski da relatividade restrita.

Até aqui todos os deslocamentos pressupõem velocidade constante. Entretanto a relatividade restrita não é tão restrita assim, e suporta referenciais acelerados.

3) Referencial com aceleração própria constante

Suponhamos um referencial não inercial R, onde qualquer objeto adquire movimento uniformemente acelerado em relação a ele, uma vez que possa se deslocar livremente. Essa condição simula o que ocorre com a aceleração da gravidade na superfície da terra, quando para baixas alturas g é considerado constante. R é dito referencial com aceleração própria constante. A trajetória de R no espaço-tempo pode ser analisada a partir de qualquer referencial inercial O_j.

$X = [X_0 , X_1 , X_2, X_3] = [t , x , y, z]$ é chamado 4-vetor da posição de R no espaço-tempo.

Embora as componentes do vetor mudem, para qualquer O_j o valor de $|X|^2 = s^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ é invariante.

Como t, x, y e z mudam conforme as tranformações de Lorentz para diferentes O_j, as componentes da velocidade (dx/dt , dy/dt , dz/dt) também são em geral diferentes para cada um deles. Mas derivando-se os 4 componentes de X em relação ao invariante τ, obtém-se uma relação definida entre eles, seja qual for a escolha de O_j como será mostrado a seguir:

$U = [dt/d\tau , dx/d\tau , dy/d\tau , dz/d\tau]$

Para calcular dt/dτ, parte-se da definição de tempo próprio, agora com 3 componentes espaciais:

$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$
$\Delta\tau = (\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2)^{(1/2)}$

Claro que para isso $\Delta\tau^2 > 0$, senão não é uma trajetória possível no espaço-tempo.

$d\tau/dt = (\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2)^{(-1/2)}[\Delta t - \Delta x(dx/dt) - \Delta y(dy/dt) - \Delta z(dz/dt)]$
$d\tau/dt = [\Delta t - v_x\Delta x - v_y\Delta y - v_z\Delta z]/\Delta\tau$
$d\tau/dt = [\Delta t/\Delta\tau - v_x(\Delta x/\Delta t)(\Delta t/\Delta\tau) - v_y(\Delta y/\Delta t)(\Delta t/\Delta\tau) - v_z(\Delta z/\Delta t)(\Delta t/\Delta\tau)]$
$d\tau/dt = \Delta t/\Delta\tau[1 - v_x(\Delta x/\Delta t) - v_y(\Delta y/\Delta t) - v_z(\Delta z/\Delta t)]$

Quando os delta tendem a zero, mesmo se as velocidades não forem constantes:
$\Delta x/\Delta t \to v_x$, $\Delta y/\Delta t \to v_y$, $\Delta z/\Delta t \to v_z$:

$d\tau/dt = dt/d\tau[1 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2]$
$d\tau/dt = dt/d\tau[1 - v^2]$
$1/(dt/d\tau) = dt/d\tau[1 - v^2]$
$dt/d\tau = 1 / [1 - v^2]^{(1/2)}$

O 4-vetor da velocidade no espaço-tempo não deve ser confundido com a velocidade no sentido usual, embora seja função desta.

$U = [U_0 , U_1 , U_2, U_3] = [1 / (1 - v^2)^{(1/2)} , v_x/(1 - v^2)^{(1/2)} , v_y/(1 - v^2)^{(1/2)}, v_z/(1 - v^2)^{(1/2)}]$

Note-se que as componentes desse vetor são diferentes para cada O_j, (já que v é uma função do referencial escolhido) e também de τ (já que R é um referencial acelerado). Quando a velocidade é muito menor que a da luz ($v \ll 1$), ou seja, quando selecionamos um O_j próximo da velocidade de R, as componente espaciais se reduzem à v_x , v_y, v_z.

O módulo de U, como o de X, não varia com a mudança de referenciais inerciais:

$|U|^2 = -U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = -1$

E além disso ele é sempre o mesmo! Não depende das coordenadas do espaço-tempo como no vetor posição.

A derivação dos 4-vetores para a posição e velocidade, tem uma fácil visualização geométrica, em que o tempo é associado ao eixo de simetria de um cone, com ângulo do vértice de 45^0. O eixo x é perpendicular a esse eixo, e há um eixo τ perpendicular a ambos.

A equação do cone:
$x^2 + \tau^2 = t^2$

Para cada valor de τ, o resultado da intercessão de um plano paralelo ao plano xt em τ é uma hipérbole:
$t^2 - x^2 = \tau^2$

A equação de um plano N, normal a xt e passando pela origem, com inclinação v.
$x - vt = 0$

Os pontos x e t de intercessão entre o plano N e a hipérbole, em função de τ e v:
$\tau^2 = t^2 - v^2t^2 \Rightarrow \tau^2 = t^2(1 - v^2) \Rightarrow t = \tau / (1 - v^2)^{(1/2)}$
$\tau^2 = (x/v)^2 - x^2 \Rightarrow \tau^2 = (1/v^2 - 1)x^2 \Rightarrow x = v\tau / (1 - v^2)^{(1/2)}$

Considerando velocidade constante:
$dt/d\tau = 1 / (1 - v^2)^{(1/2)}$
$dx/d\tau = v / (1 - v^2)^{(1/2)}$

Para a obter o 4-vetor da aceleração, deriva-se novamente cada componente de U em relação a τ:

$d(1 / (1 - v^2)^{(1/2)}) / d\tau = [d(1 / (1 - v^2)^{(1/2)}) / dt][dt/d\tau]$
$d(1 / (1 - v^2)^{(1/2)}) / d\tau = [\Sigma v_j(dv_j/dt) / (1 - v^2)^{(3/2)}][1 / (1 - v^2)^{(1/2)}]$
$d(1 / (1 - v^2)^{(1/2)}) / d\tau = \Sigma v_j(dv_j/dt) / (1 - v^2)^2 = \mathbf{v}.(\mathbf{dv/dt}) / (1 - v^2)^2$

$d(v_i/(1 - v^2)^{(1/2)}) / d\tau = v_i\, \mathbf{v}.(\mathbf{dv/dt}) / (1 - v^2)^2 + (dv_i/dt)(dt/d\tau)/(1 - v^2)^{(1/2)}$
$d(v_i/(1 - v^2)^{(1/2)}) / d\tau = v_i\, \mathbf{v}.(\mathbf{dv/dt}) / (1 - v^2)^2 + (dv_i/dt)/(1 - v^2)$
$d(v_i/(1 - v^2)^{(1/2)}) / d\tau = 1 / (1 - v^2) [v_i\mathbf{v}.(\mathbf{dv/dt}) /(1 - v^2) + (dv_i/dt)]$

Para satisfazer a hipótese de aceleração constante, tanto sua magnitude como sua direção, medidas nesse referencial R não devem se alterar. Só há uma situação que satisfaz essas exigências sem envolver rotação do referencial: a velocidade está na mesma direção da aceleração ($\mathbf{v}.(\mathbf{dv/dt}) = v(dv/dt)$).

Listando os componentes da velocidade e aceleração, e usando $\mathbf{v}.(\mathbf{dv/dt}) = v(dv/dt)$:

$U_0 = 1 / (1 - v^2)^{(1/2)}$
$U_1 = v_x/(1 - v^2)^{(1/2)}$
$U_2 = v_y/(1 - v^2)^{(1/2)}$
$U_3 = v_z/(1 - v^2)^{(1/2)}$

$A_0 = va / (1 - v^2)^2$
$A_1 = 1 / (1 - v^2) [v_x v(dv/dt) /(1 - v^2) + (dv_x /dt)]$
$A_2 = 1 / (1 - v^2) [v_y v(dv/dt) /(1 - v^2) + (dv_y /dt)]$
$A_3 = 1 / (1 - v^2) [v_z v(dv/dt) /(1 - v^2) + (dv_z /dt)]$

$A_1^2 = [1 / (1 - v^2)^2][v_x^2(v(dv/dt))^2/(1 - v^2)^2 + 2 v(dv/dt)v_x(dv_x /dt)/(1 - v^2) + (dv_x /dt)^2]$
$A_2^2 = [1 / (1 - v^2)^2][v_y^2(v(dv/dt))^2/(1 - v^2)^2 + 2 v(dv/dt)v_y(dv_y /dt)/(1 - v^2) + (dv_x /dt)^2]$
$A_3^2 = [1 / (1 - v^2)^2][v_z^2(v(dv/dt))^2/(1 - v^2)^2 + 2 v(dv/dt)v_z(dv_z /dt)/(1 - v^2) + (dv_x /dt)^2]$

$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = [1 / (1 - v^2)^2][v^2(v(dv/dt))^2/(1 - v^2)^2 + 2(v(dv/dt))^2/(1 - v^2) + (dv/dt)^2]$
$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = [(dv/dt)^2 / (1 - v^2)^2][v^2/(1 - v^2)(v^2/(1 - v^2) + 2) + 1]$
$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = ((dv/dt)^2 / (1 - v^2)^4)(v^2(2 - v^2)) + (1 - v^2)^2)$
$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = (dv/dt)^2 / (1 - v^2)^4$

$|A|^2 = -A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$
$|A|^2 = -(v(dv/dt))^2/(1 - v^2)^4 + (dv/dt)^2 / (1 - v^2)^4$
$|A|^2 = (dv/dt)^2/(1 - v^2)^4(- v^2 + 1)$
$|A|^2 = (dv/dt)^2/ (1 - v^2)^3$

Note-se que:
$|A|^2U_0^2 = (dv/dt)^2 / (1 - v^2)^4$

Além disso:
$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = [1 / (1 - v^2)^2][(v^2(dv/dt)^2)/(1 - v^2)^2(2 - v^2) + (dv/dt)^2]$
$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = [(dv/dt)^2 / (1 - v^2)^2][v^2/(1 - v^2)^2(2 - v^2) + 1]$
$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = [(dv/dt)^2 / (1 - v^2)^2][(2 - v^2)v^2/(1 - v^2)^2 + 1]$
$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = [(dv/dt)^2 / (1 - v^2)^4][(2 - v^2)v^2 + 1 - 2v^2 + v^4]$
$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = [(dv/dt)^2 / (1 - v^2)^4]$

Portanto:
$|A|^2U_0^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$

Por outro lado:
$A_0^2 = (v^2(dv/dt)^2) / (1 - v^2)^4$

Além disso:
$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = v^2 / (1 - v^2)$

Logo:
$A_0^2 = |A|^2[U_1^2 + U_2^2 + U_3^2]$

Como $A_\mu = dU_\mu/d\tau$, temos um sistema com 2 equações diferenciais:

$|A|^2U_0^2 = (dU_1/d\tau)^2 + (dU_2/d\tau)^2 + (dU_3/d\tau)^2$
$(dU_0/d\tau)^2 = |A|^2[U_1^2 + U_2^2 + U_3^2]$

Como a velocidade e a aceleração de R estão na mesma direção, podemos tornar o problema unidimensional. Escolhendo x como a direção de deslocamento, as equações acima se tornam:

$(dU_0/d\tau)^2 = |A|^2U_1^2$
$|A|^2U_0^2 = (dU_1/d\tau)^2$

Para um observador inercial O_j, momentaneamente parado em relação a R, v = 0 =>
$|A|^2 = (dv/dt)^2$ já que o termo $1 / (1 - v^2)^3 = 1$).

Como esse valor é suposto por hipótese constante ao longo do tempo:
$|A|^2 = (dv/dt)^2 / (1 - v^2)^3 = a$, onde "a" é uma constante, correspondente à aceleração em R.

$dU_0/d\tau = aU_1$
$dU_1/d\tau = aU_0$

Derivando a primeira equação e substituindo na segunda:
$d^2U_0 / d\tau^2 = a^2U_0$

Com a solução:
$U_0 = \cosh(a\tau) + \text{constante1}$

Derivando a segunda equação e substituindo na primeira:
$d^2U_1 / d\tau^2 = a^2U_1$

Com a solução:
$U_1 = \text{senh}(a\tau) + \text{constante2}$

Como $U_\mu = dX_\mu/d\tau$:

$dX_0/d\tau = dt/d\tau = \cosh(a\tau) + \text{constante1} \Rightarrow t = (1/a)\text{senh}(a\tau) + (\text{constante1})\tau + \text{constante3}$
$dX_1/d\tau = dx/d\tau = \text{senh}(a\tau) + \text{constante2} \Rightarrow x = (1/a)\cosh(a\tau) + (\text{constante2})\tau + \text{constante4}$

Nessas equações a velocidade da luz é unitária. Para dar um exemplo numérico com unidades do SI, é necessário introduzí-la explicitamente, adequando a consistência dimensional:

$t = (c/g)\mathrm{senh}((g/c)\tau)$
$x = (c^2/g)\cosh((g/c)\tau) – c^2/g$

onde assumimos t, x, $dt/d\tau$ e $v_x = 0$ para $\tau = 0$.

Para um foguete partindo dessas condições iniciais, com aceleração constante igual à gravidade terrestre, à medida em que sua velocidade cresce, a diferença entre o tempo medido no referencial do foguete e num referencial inercial é maior. Após 1 ano (medido no relógio dos tripulantes) com aceleração g, o foguete percorre:

$x = (c^2/g)\cosh((g/c)\tau) – c^2/g$ = 5,32 x 10^15m ou 0,56 anos luz (distância medida por um referencial inercial).

Já o tempo, medido por esse mesmo referencial inercial é:

$t = (c/g)\mathrm{senh}((g/c)\tau)$ = 1,18 anos ou cerca de 14 meses.

Voltando às equações com velocidade da luz = 1, zerando todas as constantes, e substraindo os quadrados:

$x^2 – t^2 = (1/a)^2\cosh^2(\beta) - (1/a)^2\mathrm{senh}^2(\beta) = (1/a)^2$

Essa equação define uma trajetória hiperbólica do referencial R. A hipérbole cruza o eixo horizontal num ponto tanto maior quanto menor a aceleração.

4) Conjunto de referenciais acelerados

Se considerarmos uma família de referenciais R, cada um com uma aceleração, “a” se torna uma variável. Fazemos então uma substituição de variáveis:

$\rho = 1/a$ e $\beta = a\tau$,

obtendo expressões semelhantes às coordenadas polares no plano xy.

$x = \rho\cosh(\beta)$
$t = \rho\,\mathrm{senh}(\beta)$

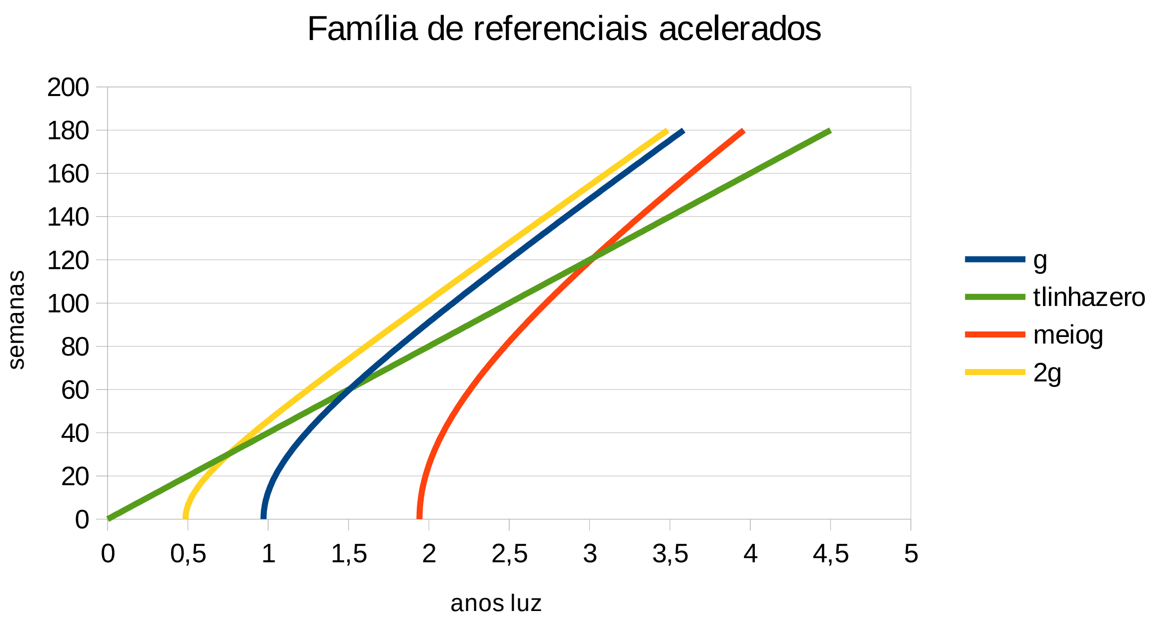
Podemos imaginar por exemplo um comboio de naves em fila, que para t = 0 tivessem sua distância relativa conforme as intercessões das hipérboles no eixo x. Cada uma seguiria com sua aceleração, e suas coordenadas evoluiriam no tempo segundo as respectivas hipérboles.

A variável β é uma função da velocidade instantânea de cada referencial acelerado.

$v = dx/dt = d(\cosh(a\tau))/d(\mathrm{senh}(a\tau)) = [d(\cosh(a\tau))/d\tau][1/d(\mathrm{senh}(a\tau))/d\tau] = \mathrm{senh}(a\tau)/\cosh(a\tau) = \tanh(a\tau) \Rightarrow \beta = \mathrm{arctanh}(v)$

Como se pode ver, $\tanh(\beta)$ varia no intervalo (-1 e 1) como seria de se esperar para v. Já β varia no intervalo $(-\infty , +\infty)$.

Em coordenadas polares (r, α) no plano, as curvas de nível para r constante são círculos centrados na origem. As de ângulo constante são retas passando pela origem.



Em coordenadas polares relativísticas de 2 dimensões (ρ, β), as curvas de nível para ρ constante são hipérboles:

$x^2 - t^2 = \rho^2\cosh^2(\beta) - \rho^2\mathrm{senh}^2(\beta) = \rho^2$

Na figura acima, são mostrados 3 desses referenciais, com acelerações de (1/2)g, g e 2g. Note-se que para a maior aceleração, a curva tende mais rápido à assíntota, ou seja à velocidade da luz. À medida em que as hipérboles cortam o eixo x mais próximo da origem, cresce a sua aceleração. Tanto a origem como a reta a 45^0 ($x = t$) são chamados de horizonte de eventos. Qualquer objeto acima dessa fronteira é inacessível aos referenciais acelerados.

As curvas de nível de $\beta = a\tau$ constante são retas passando pela origem, cujo coeficiente angular é a velocidade de algum referencial acelerado num dado tempo:

$x = \rho\cosh(\beta) = \rho k_1$
$t = \rho\,\mathrm{senh}(\beta) = \rho k_2$

$t/x = k_2/k_1 = \tanh(a\tau) \Rightarrow t = [\tanh(a\tau)]x \Rightarrow t = vx$ ou $t - vx = 0$
Se lembrarmos da transformação de Lorentz para o tempo:

$t' = (t - vx) / (1 - v^2)^{(1/2)}$

vemos que esses são pontos de $t' = 0$. Correspondem ao lugar geométrico dos pontos simultâneos, para algum referencial inercial com velocidade constante v. Como todos estão com velocidade v, estão parados em relação ao referencial [t' , x']. A mesma figura representada acima para um referencial inercial O_1, se repete para o referencial O_2 indicado pela reta, com a mesma distância entre as hipérboles.

O fato de que referenciais com acelerações diferentes mantenham a distância entre si não é intuitivo. Estamos acostumados com uma dependência parabólica entre espaço e tempo para o movimento uniformemente acelerado no contexto não relativístico ($x = x_o + v_o t + (1/2)at^2$). E nesse caso é claro que as distâncias iniciais entre corpos igualmente acelerados se preservam:

$t = 0 \Rightarrow x_A(0) = x_{0A}$ e $x_B(0) = x_{0B}$
$t = t \Rightarrow x_A(t) = x_{0A} + v_o t + (1/2)at^2$ e $x_B(t) = x_{0B} + v_o t + (1/2)at^2$

Para a mesma velocidade inicial v_o, a diferença $x_A - x_B$ se mantém.

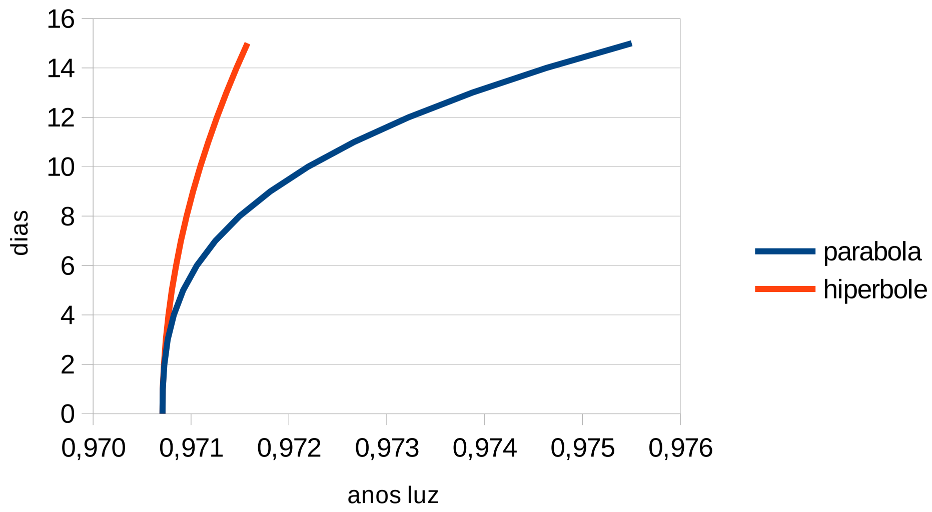
Mas a relatividade mostra que isso é uma aproximação de uma dependencia hiperbólica:

$x^2 - t^2 = \rho^2 \Rightarrow x = (t^2 + \rho^2)^{(1/2)} \Rightarrow x = \rho(1 + (t/\rho)^2)^{(1/2)} = (1/a)(1 + (at)^2)^{(1/2)}$

Quando a aceleração é baixa e/ou persiste por pouco tempo, a expressão pode ser aproximada pelos primeiros termos da série de Taylor:

$x(u) = (1/a)(1 + (u)^2)^{(1/2)}$
$x(u) = (1/a)\{1 + (1/2)(1+(u)^2)^{(-1/2)}(2u)|_0 u + (1/2)[(-1/2)(1+(u)^2)^{(-3/2)}2u^2) + (1+(u)^2)^{(-1/2)}]|_0(u)^2\}$
$x(u) = (1/a)\{1 + (1/2)(u)^2\} \Rightarrow$
$x(t) = x(u(t)) = (1/a)\{1 + (1/2)(at)^2\} \Rightarrow x(t) = 1/a + (1/2)at^2$

Evidenciando a aproximação parabólica.



O gráfico acima mostra a diferença para um foguete com aceleração g. Em vermelho a trajetória do foguete nos primeiros 15 dias. Em azul a trajetória parabólica prevista pela cinemática não relativística.

Para 2 eventos no mesmo referencial inercial:

$\Delta s^2 = [x_1 - x_2]^2 - [t_1 - t_2]^2$
$\Delta s^2 = [\rho_1\cosh(\beta_1) - \rho_2\cosh(\beta_2)]^2 - [\rho_1\text{senh}(\beta_1) - \rho_2\text{senh}(\beta_2)]^2$
$\Delta s^2 = \rho_1^2\cosh^2(\beta_1) + \rho_2^2\cosh^2(\beta_2) - \rho_1^2\text{senh}^2(\beta_1) - \rho_2^2\text{senh}^2(\beta_2) - 2\rho_1\rho_2[\cosh(\beta_1)\cosh(\beta_2) - \text{senh}(\beta_1)\text{senh}(\beta_2)]$
$\Delta s^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cosh(\beta_1-\beta_2)$

Quando os eventos forem bem próximos, com $\rho_2 = \rho$, $\rho_1 = \rho + \Delta\rho$, $\beta_1-\beta_2 = \Delta\beta$ e $\cosh(\Delta\beta) = 1 + \Delta\beta^2/2$

$\Delta s^2 = (\rho + \Delta\rho)^2 + \rho^2 - 2(\rho + \Delta\rho)\rho(1 + \Delta\beta^2/2)$
$\Delta s^2 = \rho^2 + \Delta\rho^2 + 2\rho\Delta\rho + \rho^2 - 2(\rho^2 + \rho\Delta\rho)(1 + \Delta\beta^2/2)$
$\Delta s^2 = \rho^2 + \Delta\rho^2 + 2\rho\Delta\rho + \rho^2 - 2(\rho^2 + \rho\Delta\rho) - 2(\rho^2 + \rho\Delta\rho)\Delta\beta^2/2)$

$\Delta s^2 = \Delta\rho^2 - (\rho^2 \Delta\beta^2 + \rho\Delta\rho\Delta\beta^2)$

Quando o intervalo tende a zero, o diferencial de ordem superior desaparece:
$ds^2 = d\rho^2 - \rho^2 d\beta^2$

Revelando uma métrica similar à das coordenadas polares no plano xy:

$$ds^2 = \begin{matrix} d\rho & d\beta \end{matrix} * \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -\rho^2 \end{matrix} * \begin{matrix} d\rho \\ d\beta \end{matrix}$$

Assim como as coordenadas polares circulares [r , θ] representam o mesmo plano [x , y] descrito pelas coordenadas cartesianas, as coordenadas polares hiperbólicas [ρ , β] descrevem o mesmo espaço tempo [x, t]. Mas a mudança de coordenadas tem aqui um sentido físico.

Quando se usa x e t para descrever as trajetórias dos referenciais acelerados, seus valores dependem de qual observador inercial é escolhido como referência. Já ρ e β são variáveis intrínsecas aos referenciais acelerados. Usando como exemplo uma fila de naves aceleradas:

4.1) É sempre possível supor um observador inercial que monitora a vinda das naves em sua direção. Quando elas estiverem momentâneamente paradas em seu referencial embarca na mais próxima. Experimentará então uma mudança de coordenadas, de Minkowski para polares.

4.2) Uma vez numa das naves, ele sabe sua aceleração, pois basta medir o tempo e distância de queda de um objeto na nave. Os mesmo para os tripulantes das outras naves. Com isso sabem a distância ao horizonte de eventos, pois $\rho = 1/a$.

4.3) Pelo intervalo de tempo de seu relógio ($\Delta\tau$), calcula $\Delta\beta = a\Delta\tau$.

4.4) A medida da distância para outra nave difere da feita num referencial inercial, no sentido em que os relógios não estarão sincronizados. A que estiver mais longe do horizonte de eventos terá um $\Delta\tau$ maior. Mas sua aceleração será menor na mesma proporção, e o valor de β será o mesmo. Com isso a distância $\Delta\rho$ entre naves não varia com o tempo.

4.5) Se o viajante sair fora de sua nave, volta a ser um referencial inercial. Ele terá feito uma mudança de coordenadas polares para as de Minkowski. Mas não poderá mais reverter a mudança a não ser sendo atropelado, pois as naves que passarão por ele terão velocidades cada vez maiores até ele finalmente cruzar o horizonte de eventos.