

Plano infinito

Supondo inicialmente a métrica geral, com velocidade da luz = 1:

$$d\tau^2 = -Fdt^2 + Gdx^2 + Hdy^2 + Jdz^2$$

- 1) As funções $g_{\mu\nu}$ não devem depender de x e y por razões de simetria. Qualquer derivada em relação a x e y deve ser zero. Além disso, $G = H =$ constante também por simetria. Chamamos essa constante de k_2 .
- 2) As funções não dependem do tempo. Qualquer derivada com respeito ao tempo é zero. Assim $F = F(z)$ e $J = J(z)$
- 3) Solução no vácuo, $T_{\mu\nu} = 0$.

A métrica com essas restrições fica:

$$d\tau^2 = -F(z)dt^2 + k_2dx^2 + k_2dy^2 + J(z)dz^2$$

Os coeficientes da métrica são: $g_{00} = -F$ $g_{11} = k_2$ $g_{22} = k_2$ $g_{33} = J$.

Os coeficientes da inversa são: $g^{00} = -1/F$ $g^{11} = 1/k_2$ $g^{22} = 1/k_2$ $g^{33} = 1/J$.

Cálculo dos símbolos de Christoffel:

Os símbolos de Christoffel são calculados a partir do tensor métrico:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = 1/2 g^{\mu\lambda} (g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda})$$

- 1) Todas as derivadas em relação ao tempo desaparecem: $g_{\mu\nu,0} = 0$.
- 2) Todos os termos fora da diagonal desaparecem $g_{\mu\nu} = 0$, se $\mu \neq \nu$.
- 3) Os símbolos são simétricos nos dois índices inferiores: $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$
- 4) Por causa de (2) o cálculo dos símbolos, que seria um somatório com λ variando de 0 a 3, só tem um componente não zero quando $\mu = \lambda$.
- 5) Apenas as derivadas em relação a z (índice = 3) são diferentes de zero.

Examinando cada tipo, e usando a convenção de que índices latinos variam de 1 a 3. Gregos de 0 a 3:

$\Gamma^0_{\nu\sigma}$:

$$\Gamma^0_{00} = 1/2 g^{00} (g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}) = 0$$

$$\Gamma^0_{0i} = 1/2 g^{00} (g_{00,i} + g_{0i,0} - g_{0i,0}) = 0 \text{ para } i=1 \text{ e } 2.$$

$$\Gamma^0_{03} = 1/2 g^{00} g_{00,3} = (\partial F / \partial z) / (2F)$$

$$\Gamma^0_{ij} = 1/2 g^{00} (g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}) = 0$$

$$\Gamma^0_{30} = 1/2 g^{00} g_{00,3} = (\partial F / \partial z) / (2F)$$

$\Gamma^1_{\nu\sigma}$:

$$\Gamma^1_{00} = 1/2 g^{11} (g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1}) = 0$$

$$\Gamma^1_{0i} = 1/2 g^{11} (g_{10,i} + g_{1i,0} - g_{0i,1}) = 0$$

$$\Gamma^1_{ij} = 1/2 g^{11} (g_{1i,j} + g_{1j,i} - g_{ij,1}) = 0$$

$\Gamma^2_{\nu\sigma}$:

$$\Gamma^2_{00} = 1/2 g^{22} (g_{20,0} + g_{20,0} - g_{00,2}) = 0$$

$$\Gamma^2_{0i} = 1/2 g^{22} (g_{20,i} + g_{2i,0} - g_{0i,2}) = 0$$

$$\Gamma^2_{ij} = 1/2 g^{22} (g_{2i,j} + g_{2j,i} - g_{ij,2}) = 0$$

$\Gamma^3_{\nu\sigma}$:

$$\Gamma^3_{00} = 1/2 g^{33} (g_{30,0} + g_{30,0} - g_{00,3}) = -1/2 * 1/J * (-\partial F / \partial z) = (\partial F / \partial z) / (2J)$$

$$\Gamma^3_{0i} = 1/2 g^{33} (g_{30,i} + g_{3i,0} - g_{0i,3}) = 0$$

$$\Gamma^3_{ij} = 1/2 g^{33} (g_{3i,j} + g_{3j,i} - g_{ij,3}) = 0 \text{ para } i, j \neq 3, 3$$

$$\Gamma^3_{33} = 1/2 g^{33} (g_{33,3} + g_{33,3} - g_{33,3}) = 1/2 * 1/J * (\partial J / \partial z) = (\partial J / \partial z) / (2J)$$

Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\beta}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^{\beta}_{\mu\beta,\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} =$$

$$\Gamma^0_{\mu 0,\nu} - \Gamma^0_{\mu\nu,0} + \Gamma^{\alpha}_{\mu 0}\Gamma^0_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^0_{\alpha 0} + \Gamma^1_{\mu 1,\nu} - \Gamma^1_{\mu\nu,1} + \Gamma^{\alpha}_{\mu 1}\Gamma^1_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^1_{\alpha 1} +$$

$$\Gamma^2_{\mu 2,\nu} - \Gamma^2_{\mu\nu,2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu 2}\Gamma^2_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^2_{\alpha 2} + \Gamma^3_{\mu 3,\nu} - \Gamma^3_{\mu\nu,3} + \Gamma^{\alpha}_{\mu 3}\Gamma^3_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^3_{\alpha 3}$$

Se $\mu \neq \nu$: (e usando o fato de que o tensor é simétrico)

$$\mu, \nu = 0, 1 \Rightarrow \text{Sobra apenas } \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}, \text{ e para } \alpha \text{ e } \beta = 0 \text{ ou } 3: = 0$$

$$\mu, \nu = 0, 2 \Rightarrow \text{Sobra apenas } \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}, \text{ e para } \alpha \text{ e } \beta = 0 \text{ ou } 3: = 0$$

$\mu, \nu = 0, 3 \Rightarrow$ Sobra apenas $\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}$, e para α e $\beta = 0$ ou $3: = 0$

$\mu, \nu = 1, 2 \Rightarrow$ Sobra apenas $\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}$, e para α e $\beta = 3: \Gamma_{13}^3 \Gamma_{32}^3 = 0$

$\mu, \nu = 1, 3 \Rightarrow$ Sobra apenas $\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}$, e para α e $\beta = 3: \Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^3 = 0$

$\mu, \nu = 2, 3 \Rightarrow$ Sobra apenas $\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}$, e para α e $\beta = 3: \Gamma_{23}^3 \Gamma_{33}^3 = 0$

Portanto restam os termos da diagonal:

$\mu, \nu = 0, 0 \Rightarrow$

$$-\Gamma_{00,3}^3 + \Gamma_{03}^0 \Gamma_{00}^3 - \Gamma_{00}^3 \Gamma_{33}^3 =$$

$$-\partial((\partial F/\partial z)/(2J))/\partial z + (\partial F/\partial z)/(2F) * (\partial F/\partial z)/(2J) - (\partial F/\partial z)/(2J) * (\partial J/\partial z)/(2J) =$$

$$-(F''/(2J) - 1/(2J^2)F'J') + F'^2/(4FJ) - F'J'/(4J^2) = -F''/(2J) + F'J'/(2J^2) + F'^2/(4FJ) - F'J'/(4J^2) =$$

$$-F''/(2J) + F'J'/(4J^2) + F'^2/(4FJ)$$

$\mu, \nu = 1, 1 \Rightarrow 0$

$\mu, \nu = 2, 2 \Rightarrow 0$

$\mu, \nu = 3, 3 \Rightarrow$

$$\Gamma_{30,3}^0 + \Gamma_{30}^0 \Gamma_{03}^0 - \Gamma_{33}^3 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{33,3}^3 - \Gamma_{33,3}^3 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3 =$$

$$\partial((\partial F/\partial z)/(2F))/\partial z + ((\partial F/\partial z)/(2F))^2 - (\partial J/\partial z)/(2J) * (\partial F/\partial z)/(2F)$$

$$F''/(2F) - F'^2/(2F^2) + F'^2/(4F^2) - F'J'/(4FJ) = F''/(2F) - F'^2/(4F^2) - F'J'/(4FJ)$$

$$\text{O escalar de Ricci } R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} =$$

$$-1/F(-F''/(2J) + F'J'/(4J^2) + F'^2/(4FJ)) + 1/J(F''/(2F) - F'^2/(4F^2) - F'J'/(4FJ)) =$$

$$F''/(JF) - F'J'/(2FJ^2) - F'^2/(2F^2J)$$

Usando o tensor de Einstein = 0:

$$R_{00} - 1/2g_{00}R = 0 \Rightarrow -F''/(2J) + F'J'/(4J^2) + F'^2/(4FJ) - 1/2(-F) * (F''/(JF) - F'J'/(2FJ^2) - F'^2/(2F^2J))$$

$$= 0 \Rightarrow -F''/(2J) + F'J'/(4J^2) + F'^2/(4FJ) + F''/(2J) - F'J'/(4J^2) - F'^2/(4FJ) = 0$$

$$R_{33} - 1/2g_{33}R = 0 \Rightarrow F''/(2F) - F'^2/(4F^2) - F'J'/(4FJ) - 1/2 * J * (F''/(JF) - F'J'/(2FJ^2) - F'^2/(2F^2J)) =$$

$$F''/(2F) - F'^2/(4F^2) - F'J'/(4FJ) - F''/(2F) + F'J'/(4FJ) + F'^2/(4F^2) = 0$$

Como todos os termos se cancelam isso não ajuda.

Acabamos então com 3 equações diferenciais, 2 para o tensor de Ricci que deve ser zero no vácuo e uma para o escalar de Ricci que também deve zerar. Essas equações não são independentes, sendo combinações lineares se tomarmos F e J como coeficientes:

$$F''/(2J) - F'^2/(4FJ) - F'J'/(4J^2) = 0$$

$$F''/(2F) - F'^2/(4F^2) - F'J'/(4FJ) = 0$$

$$F''/(JF) - F'^2/(2F^2J) - F'J'/(2FJ^2) = 0$$

Rearranjando para isolar o termo com segunda derivada:

$$F'' - F'^2/(2F) - F'J'/(2J) = 0$$

Por inspeção, $F = (k_0 + k_1z)^2$ e $J = k_3$, onde k_0 , k_1 e k_3 são constantes, satisfaz a equação:

$$2k_1^2 - (2k_1(k_0 + k_1z))^2 / (2(k_0 + k_1z)^2) - 0 = 0$$

A métrica pode ser escrita então como:

$$d\tau^2 = -(k_0 + k_1z)^2 dt^2 + k_2 dx^2 + k_2 dy^2 + k_3 dz^2$$

Pergunta: algum termo do tensor de Riemann é diferente de zero?

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\mu_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\mu\delta}$$

Se $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1$ ou 2 , os símbolos de Christoffel são todos zero e o componente do tensor é zero.

Se $\alpha = 0$:

$$\beta, \gamma, \delta = 0, 0, 0 \Rightarrow R^0_{000} = \Gamma^0_{00,0} - \Gamma^0_{00,0} + \Gamma^3_{00}\Gamma^0_{30} - \Gamma^3_{00}\Gamma^0_{30} = 0$$

$$\beta, \gamma, \delta = 0, 0, 3 \Rightarrow R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^0_{03,0} - \Gamma^0_{00,3} + \Gamma^\mu_{03}\Gamma^0_{\mu 0} - \Gamma^\mu_{00}\Gamma^0_{\mu 3} = 0$$

$$\beta, \gamma, \delta = 0, 3, 0 \Rightarrow R^0_{030} = \Gamma^0_{00,3} - \Gamma^0_{03,0} + \Gamma^3_{00}\Gamma^0_{33} - \Gamma^0_{03}\Gamma^0_{00} = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

$$\beta, \gamma, \delta = 0, 3, 3 \Rightarrow \Gamma^0_{03,3} - \Gamma^0_{03,3} + \Gamma^\mu_{03}\Gamma^0_{\mu 3} - \Gamma^\mu_{03}\Gamma^0_{\mu 3} = 0 \text{ cancelam 2 a 2.}$$

$$\beta, \gamma, \delta = 3, 0, 0 \Rightarrow \Gamma^0_{30}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{30}\Gamma^0_{00} = 0$$

$$\beta, \gamma, \delta = 3, 0, 3 \Rightarrow \Gamma^0_{33,0} - \Gamma^0_{30,3} + \Gamma^3_{33}\Gamma^0_{30} - \Gamma^0_{30}\Gamma^0_{03} = -F''/(2F) + F'^2/(4F^2) + J'F'/(4FJ) = 0 \text{ (é uma das equações diferenciais resultantes do tensor de Ricci = 0.}$$

$$\beta, \gamma, \delta = 3, 3, 0 \Rightarrow \Gamma^0_{30,3} - \Gamma^0_{33,0} + \Gamma^0_{30}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{33}\Gamma^0_{30} = 0, \text{ é a anterior com sinal invertido.}$$

$$\beta, \gamma, \delta = 3, 3, 3 \Rightarrow \Gamma^0_{33,3} - \Gamma^0_{33,3} + \Gamma^3_{33}\Gamma^0_{33} - \Gamma^3_{33}\Gamma^0_{33} = 0.$$

Se $\alpha = 3$

$$\beta, \gamma, \delta = 0, 0, 0 \Rightarrow R^3_{000} = \Gamma^3_{00,0} - \Gamma^3_{00,0} + \Gamma^3_{00}\Gamma^3_{30} - \Gamma^3_{00}\Gamma^3_{30} = 0$$

$\beta, \gamma, \delta = 0, 0, 3 \Rightarrow R^3_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^3_{03,0} - \Gamma^3_{00,3} + \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{00} - \Gamma^3_{00}\Gamma^3_{33} = F''/(2J) - F'^2/(4FJ) - F'J'/(4J^2) = 0$ (é uma das equações diferenciais resultantes do tensor de Ricci = 0).

$$\beta, \gamma, \delta = 0, 3, 0 \Rightarrow R^3_{030} = \Gamma^3_{00,3} - \Gamma^3_{03,0} + \Gamma^3_{00}\Gamma^3_{33} - \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{00} = 0 \text{ (anterior com sinal trocado)}$$

$$\beta, \gamma, \delta = 0, 3, 3 \Rightarrow \Gamma^3_{03,3} - \Gamma^3_{03,3} + \Gamma^\mu_{03}\Gamma^3_{\mu 3} - \Gamma^\mu_{03}\Gamma^3_{\mu 3} = 0 \text{ cancelam 2 a 2.}$$

$$\beta, \gamma, \delta = 3, 0, 0 \Rightarrow \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{00} - \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{00} = 0$$

$$\beta, \gamma, \delta = 3, 0, 3 \Rightarrow \Gamma^3_{33,0} - \Gamma^3_{30,3} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{30} - \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{03} = 0$$

$$\beta, \gamma, \delta = 3, 3, 0 \Rightarrow \Gamma^3_{30,3} - \Gamma^3_{33,0} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{03} - \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{30} = 0$$

$$\beta, \gamma, \delta = 3, 3, 3 \Rightarrow \Gamma^3_{33,3} - \Gamma^3_{33,3} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{33} = 0.$$

Todos os componentes do tensor se anulam, e portanto o espaço tempo é plano.

