Métrica com simetria planar e independente do tempo:

Quando todas as coordenadas, x, y, z e t são pequenas o suficiente, a superfície da terra pode ser aproximada como plana e a aceleração da gravidade considerada constante. O objetivo é mostrar como a relação parabólica entre altura e tempo, válida para corpos em queda livre, decorre de uma métrica com simetria planar, (que é basicamente o suposto acima), usando a teoria geral da relatividade. Adicionalmente mostra-se que a curvatura do espaço tempo é nula.

Supondo inicialmente a métrica geral, com velocidade da luz = 1:

$d\tau^2 = Fdt^2 - Gdx^2 - Hdy^2 - Jdz^2$

1) As funções $g_{\mu\nu}$ (F, G, H e J)não devem depender de x e y por razões de simetria. Qualquer derivada em relação a x e y deve ser zero. Além disso, G = H = constante também por simetria. Chamamos sem perda de generalidade essa constante de 1.
2) As funções não dependem do tempo. Qualquer derivada com respeito ao tempo é zero. Assim F = F(z) e J = J(z)
3) Solução no vácuo, $T_{\mu\nu} = 0$.

A métrica com essas restrições fica:

$d\tau^2 = F(z)dt^2 - dx^2 - dy^2 - J(z)dz^2$

Os coeficientes da métrica são: $g_{00} = F$ $g_{11} = -1$ $g_{22} = -1$ $g_{33} = -J$.

Os coeficientes da inversa são: $g^{00} = 1/F$ $g^{11} = -1$ $g^{22} = -1$ $g^{33} = -1/J$.

Cálculo dos símbolos de Christoffel:

Os símbolos de Christoffel são calculados a partir do tensor métrico:

$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma} = 1/2\, g^{\mu\lambda} (g_{\lambda\nu,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda})$

1) Apenas as derivadas em relação a z (índice = 3) são diferentes de zero
2) Todos os termos fora da diagonal desaparecem $g_{\mu\nu} = 0$, se $\mu \neq \nu$.
3) Os símbolos são simétricos nos dois índices inferiores: $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu}$
4) Por causa de (2) o cálculo dos símbolos, que seria um somatório com λ variando de 0 a 3, só tem um componente não zero quando $\mu = \lambda$.

Examinando cada tipo, e usando a convenção de que índices latinos variam de 1 a 3. Gregos de 0 a 3:

$\Gamma^{0}{}_{\nu\sigma}$:

$$\Gamma^{0}{}_{00} = 1/2\, g^{00} (g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}) = 0$$

$\Gamma^0{}_{0i} = 1/2\, g^{00} (g_{00,i} + g_{0i,0} - g_{0i,0}) = 0$ para i=1 e 2.

$\Gamma^0{}_{03} = ½\, g^{00}\, g_{00,3} = (\partial F/\partial z) / (2F)$

$\Gamma^0{}_{ij} = 1/2\, g^{00} (g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}) = 0$

$\Gamma^0{}_{30} = ½\, g^{00}\, g_{00,3} = (\partial F/\partial z) / (2F)$

$\Gamma^1{}_{\nu\sigma}$:

$\Gamma^1{}_{00} = 1/2\, g^{11} (g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1}) = 0$

$\Gamma^1{}_{0i} = 1/2\, g^{11} (g_{10,i} + g_{1i,0} - g_{0i,1}) = 0$

$\Gamma^1{}_{ij} = 1/2\, g^{11} (g_{1i,j} + g_{1j,i} - g_{ij,1}) = 0$

$\Gamma^2{}_{\nu\sigma}$:

$\Gamma^2{}_{00} = 1/2\, g^{22} (g_{20,0} + g_{20,0} - g_{00,2}) = 0$

$\Gamma^2{}_{0i} = 1/2\, g^{22}(g_{20,i} + g_{2i,0} - g_{0i,2}) = 0$

$\Gamma^2{}_{ij} = 1/2\, g^{22} (g_{2i,j} + g_{2j,i} - g_{ij,2}) = 0$

$\Gamma^3{}_{\nu\sigma}$:

$\Gamma^3{}_{00} = 1/2\, g^{33} (g_{30,0} + g_{30,0} - g_{00,3}) = (\partial F/\partial z)/(2J)$

$\Gamma^3{}_{0i} = 1/2\, g^{33} (g_{30,i} + g_{3i,0} - g_{0i,3}) = 0$

$\Gamma^3{}_{ij} = 1/2\, g^{33} (g_{3i,j} + g_{3j,i} - g_{ij,3}) = 0$ para $i,j \neq 3,3$

$\Gamma^3{}_{33} = 1/2\, g^{33} (g_{33,3} + g_{33,3} - g_{33,3}) = (\partial J/\partial z)/(2J)$

Tensor de Ricci:

$R_{\mu\nu} = R^{\beta}{}_{\mu\nu\beta} = \Gamma^{\beta}{}_{\mu\beta,\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta} =$

$\Gamma^0{}_{\mu0,\nu} - \Gamma^0{}_{\mu\nu,0} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu0}\Gamma^0{}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^0{}_{\alpha0} + \Gamma^1{}_{\mu1,\nu} - \Gamma^1{}_{\mu\nu,1} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu1}\Gamma^1{}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^1{}_{\alpha1} +$

$\Gamma^2{}_{\mu2,\nu} - \Gamma^2{}_{\mu\nu,2} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu2}\Gamma^2{}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^2{}_{\alpha2} + \Gamma^3{}_{\mu3,\nu} - \Gamma^3{}_{\mu\nu,3} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu3}\Gamma^3{}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^3{}_{\alpha3}$

Se $\mu\neq\nu$: (e usando o fato de que o tensor é simétrico)

$\mu,\nu = 0,1 \Rightarrow$ Sobra apenas $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu}$, e para α e β = 0 ou 3: $= 0$

$\mu,\nu = 0,2 \Rightarrow$ Sobra apenas $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu}$, e para α e β = 0 ou 3: $= 0$

$\mu,\nu = 0,3 \Rightarrow$ Sobra apenas $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu}$, e para α e β = 0 ou 3: $= 0$

$\mu,\nu = 1,2 \Rightarrow$ Sobra apenas $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu}$, e para α e β = 3: $\Gamma^{3}{}_{13}\Gamma^{3}{}_{32} = 0$

$\mu,\nu = 1,3 \Rightarrow$ Sobra apenas $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu}$, e para α e β = 3: $\Gamma^{3}{}_{13}\Gamma^{3}{}_{33} = 0$

$\mu,\nu = 2,3 \Rightarrow$ Sobra apenas $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu}$, e para α e β = 3: $\Gamma^{3}{}_{23}\Gamma^{3}{}_{33} = 0$

Portanto restam os termos da diagonal:

$\mu,\nu = 0,0 \Rightarrow$

$-\Gamma^{3}{}_{00,3} + \Gamma^{0}{}_{03}\Gamma^{3}{}_{00} - \Gamma^{3}{}_{00}\Gamma^{3}{}_{33} =$

$-\partial((\partial F/\partial z)/(2J))/\partial z + (\partial F/\partial z) / (2F)^* (\partial F/\partial z)/(2J) - (\partial F/\partial z)/(2J)^* (\partial J/\partial z)/(2J) =$

$-(F''/(2J) - 1/(2J^2)F'J') + F'^2 / (4FJ) - F'J' / (4J^2) = -F''/(2J) + F'J'/(2J^2) + F'^2 / (4FJ) - F'J' / (4J^2) =$

$-F''/(2J) + F'J'/(4J^2) + F'^2 / (4FJ)$

$\mu,\nu = 1,1 \Rightarrow 0$

$\mu,\nu = 2,2 \Rightarrow 0$

$\mu,\nu = 3,3 \Rightarrow$

$\Gamma^{0}{}_{30,3} + \Gamma^{0}{}_{30}\Gamma^{0}{}_{03} - \Gamma^{3}{}_{33}\Gamma^{0}{}_{30} + \Gamma^{3}{}_{33,3} - \Gamma^{3}{}_{33,3} + \Gamma^{3}{}_{33}\Gamma^{3}{}_{33} - \Gamma^{3}{}_{33}\Gamma^{3}{}_{33} =$

$\partial((\partial F/\partial z) / (2F))/ \partial z + ((\partial F/\partial z) / (2F))^2 - (\partial J/\partial z)/(2J)^*(\partial F/\partial z) / (2F)$

$F''/(2F) - F'^2/(2F^2) + F'^2/(4F^2) - F'J'/(4FJ) = F''/(2F) - F'^2/(4F^2) - F'J'/(4FJ)$

Acabamos então com 2 equações diferenciais para o tensor de Ricci que deve ser zero no vácuo. Essas equações não são independentes, sendo combinações lineares se tomarmos F e J como coeficientes:

$F''/(2J) - F'^2 / (4FJ) - F'J'/(4J^2) = 0$

$F''/(2F) - F'^2/(4F^2) - F'J'/(4FJ) = 0$

Rearranjando para isolar o termo com segunda derivada resulta 1 só equação:

$F'' - F'^2 / (2F) - F'J'/(2J) = 0$

Por inspeção, $F = (k_0 + k_1 z)^2$ e $J = k_3$, onde k_0, k_1 e k_3 são constantes, satisfaz a equação:

$2 k_1^2 - (2 k_1 (k_0 + k_1 z))^2 / (2(k_0 + k_1 z)^2) - 0 = 0$

A métrica pode ser escrita então como:

$d\tau^2 = (k_0 + k_1 z)^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - k_3 dz^2$

Como k_3 é constante podemos tomá-la sem perda de generalidade como 1. Além disso vamos colocar explicitamente a velocidade da luz:

$d\tau^2 = (k_0 + k_1z)^2dt^2 - (1/c^2)dx^2 - (1/c^2)dy^2 - (1/c^2)dz^2$

<u>Equação da geodésica:</u>

$\partial^2x^i/\partial\tau^2 + \Gamma^i_{jk}\,\partial x^j/\partial\tau\;\partial x^K/\partial\tau = 0$

i=0: $\partial^2x^0/\partial\tau^2 + \Gamma^0_{03}\,\partial x^0/\partial\tau\;\partial x^3/\partial\tau + \Gamma^0_{30}\,\partial x^3/\partial\tau\;\partial x^0/\partial\tau = 0 \Rightarrow$

$\Gamma^0_{03} = \Gamma^0_{30} = ½\, g^{00}\, g_{00,3} = k_1(k_0 + k_1z)/(k_0 + k_1z)^2 = k_1/(k_0 + k_1z)$

$\partial^2t/\partial\tau^2 + (2k_1/(k_0 + k_1z))\,(\partial z/\partial\tau)\,(\partial t/\partial\tau) = 0$

Por inspeção, obtém-se $\partial t/\partial\tau = C_0(k_1/(k_0 + k_1z))^2$ pois:

$-2C_0k_1^2(\,1/(k_0 + k_1z)^3)(\partial z/\partial\tau) + (2k_1/(k_0 + k_1z))(\partial z/\partial\tau)\,C_0(k_1/(k_0 + k_1z))^2 = 0$

i=1: $\partial^2x^1/\partial\tau^2 = 0 \Rightarrow \partial x/\partial\tau = C_1$

i=2: $\partial^2x^2/\partial\tau^2 = 0 \Rightarrow \partial y/\partial\tau = C_2$

i=3: $\partial^2x^3/\partial\tau^2 + \Gamma^3_{00}\,\partial x^0/\partial\tau\;\partial x^0/\partial\tau + \Gamma^3_{33}\,\partial x^3/\partial\tau\;\partial x^3/\partial\tau = 0$

$\Gamma^3_{00} = k_1(k_0 + k_1z)/\,(1/c^2) = k_1c^2(k_0 + k_1z)$

$\Gamma^3_{33} = 0$

$\partial^2z/\partial\tau^2 + k_1c^2(k_0 + k_1z)(\partial t/\partial\tau)^2 = 0$

Substituindo o valor de $\partial t/\partial\tau \Rightarrow$

$\partial^2z/\partial\tau^2 + k_1c^2(k_0 + k_1z)(\,C_0(k_1/(k_0 + k_1z))^2\,)^2 = 0$

$\partial^2z/\partial\tau^2 + C_0^2k_1^5c^2/(k_0 + k_1z)^3 = 0$

Expandindo o denominador em série de Taylor:

$f(z) = 1/(k_0 + k_1z)^3$	$f(0) = 1/k_0^3$
$\partial f/\partial z = -3k_1/(k_0 + k_1z)^4$	$\partial f/\partial z\|_0 = -3k_1/k_0^4 = -3(k_1/k_0)f(0)$
$\partial^2f/\partial z^2 = 12k_1^2/(k_0 + k_1z)^5$	$\partial^2f/\partial z^2\|_0 = 12k_1^2/k_0^5 = 12(k_1/k_0)^2f(0)$
$\partial^3f/\partial z^3 = -60k_1^3/(k_0 + k_1z)^6$	$\partial^2f/\partial z^2\|_0 = -60k_1^3/k_0^6 = -60(k_1/k_0)^3f(0)$
$\partial^nf/\partial z^n = (-1)^n((n+2)!/2)k_1^n/(k_0 + k_1z)^{(n+3)}$	$\partial^nf/\partial z^n\|_0 = (-1)^n((n+2)!/2)(k_1/k_0)^nf(0)$

Se considerarmos z pequeno e tomarmos apenas os 2 primeiros termos da série, a equação se torna:

$\partial^2 z/\partial\tau^2 + C_0^2 k_1^5 c^2 (1/k_0^3)(1 - 3(k_1/k_0)z) = 0 \Rightarrow \partial^2 z/\partial\tau^2 = 3C_0^2 c^2 (k_1^6/k_0^4)z - C_0^2 k_1^5 c^2/k_0^3$

O coeficiente de z é necessariamente positivo, portanto a solução geral é:

$z = A\cosh(3C_0 c\,(k_1^3/k_0^2)\tau) + B\operatorname{senh}(3C_0 c\,(k_1^3/k_0^2)\tau) - (1/2)C_0^2 k_1^5 c^2/k_0^3 \tau^2$

Quando $\tau = 0 \Rightarrow z = A$, portanto $A = z(0)$.

Quando $\tau = 0 \Rightarrow v_z = \partial z/\partial\tau = 3BC_0 c\,(k_1^3/k_0^2)$, portanto $B = v_z(0)k_0^2/\,(3BC_0 c k_1^3)$

A esperada dependência parabólica de z x τ surge quando tomamos apenas o primeiro termo da série de Taylor (mais uma!) das funções hiperbólicas. Para isso, τ também deve ser pequeno.

Cosh(u) ~1 e senh(u) ~ u =>

$z = z(0) + v_z(0)\tau - (1/2)C_0^2 k_1^5 c^2/k_0^3 \tau^2$

O termo $(1/2)C_0^2 k_1^5 c^2/k_0^3$ é então entendido como a aceleração local (local porque foi suposto z e τ pequenos).

Demonstração de que a curvatura do espaço tempo é nula.

O tensor de curvatura: $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\delta}$

Se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ = 1 ou 2, os símbolos de Christoffel são todos zero e o componente do tensor é zero.

Se $\alpha = 0$:

$\beta,\gamma,\delta = 0,0,0 \Rightarrow R^{0}{}_{000} = \Gamma^{0}{}_{00,0} - \Gamma^{0}{}_{00,0} + \Gamma^{3}{}_{00}\Gamma^{0}{}_{30} - \Gamma^{3}{}_{00}\Gamma^{0}{}_{30} = 0$

$\beta,\gamma,\delta = 0,0,3 \Rightarrow R^{\alpha}{}_{\beta\gamma3} = \Gamma^{0}{}_{03,0} - \Gamma^{0}{}_{00,3} + \Gamma^{\mu}{}_{03}\Gamma^{0}{}_{\mu0} - \Gamma^{\mu}{}_{00}\Gamma^{0}{}_{\mu3} = 0$

$\beta,\gamma,\delta = 0,3,0 \Rightarrow R^{0}{}_{030} = \Gamma^{0}{}_{00,3} - \Gamma^{0}{}_{03,0} + \Gamma^{3}{}_{00}\Gamma^{0}{}_{33} - \Gamma^{0}{}_{03}\Gamma^{0}{}_{00} = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$

$\beta,\gamma,\delta = 0,3,3 \Rightarrow \Gamma^{0}{}_{03,3} - \Gamma^{0}{}_{03,3} + \Gamma^{\mu}{}_{03}\Gamma^{0}{}_{\mu3} - \Gamma^{\mu}{}_{03}\Gamma^{0}{}_{\mu3} = 0$ cancelam 2 a 2.

$\beta,\gamma,\delta = 3,0,0 \Rightarrow \Gamma^{0}{}_{30}\Gamma^{0}{}_{00} - \Gamma^{0}{}_{30}\Gamma^{0}{}_{00} = 0$

$\beta,\gamma,\delta = 3,0,3 \Rightarrow \Gamma^{0}{}_{33,0} - \Gamma^{0}{}_{30,3} + \Gamma^{3}{}_{33}\Gamma^{0}{}_{30} - \Gamma^{0}{}_{30}\Gamma^{0}{}_{03} = -F''/(2F) + F'^2/(4F^2) + J'F'/(4FJ) = 0$ (é uma das equações diferenciais resultantes do tensor de Ricci = 0.

$\beta,\gamma,\delta = 3,3,0 \Rightarrow \Gamma^0{}_{30,3} - \Gamma^0{}_{33,0} + \Gamma^0{}_{30}\Gamma^0{}_{03} - \Gamma^3{}_{33}\Gamma^0{}_{30} = 0$, é a anterior com sinal invertido.

$\beta,\gamma,\delta = 3,3,3 \Rightarrow \Gamma^0{}_{33,3} - \Gamma^0{}_{33,3} + \Gamma^3{}_{33}\Gamma^0{}_{33} - \Gamma^3{}_{33}\Gamma^0{}_{33} = 0.$

Se $\alpha = 3$

$\beta,\gamma,\delta = 0,0,0 \Rightarrow R^3{}_{000} = \Gamma^3{}_{00,0} - \Gamma^3{}_{00,0} + \Gamma^3{}_{00}\Gamma^3{}_{30} - \Gamma^3{}_{00}\Gamma^3{}_{30} = 0$

$\beta,\gamma,\delta = 0,0,3 \Rightarrow R^3{}_{\beta\gamma 3} = \Gamma^3{}_{03,0} - \Gamma^3{}_{00,3} + \Gamma^0{}_{03}\Gamma^3{}_{00} - \Gamma^3{}_{00}\Gamma^3{}_{33} =$ $F''/(2J) - F'^2 / (4FJ) - F'J'/(4J^2) = 0$ (é uma das equações diferenciais resultantes do tensor de Ricci = 0.

$\beta,\gamma,\delta = 0,3,0 \Rightarrow R^3{}_{030} = \Gamma^3{}_{00,3} - \Gamma^3{}_{03,0} + \Gamma^3{}_{00}\Gamma^3{}_{33} - \Gamma^0{}_{03}\Gamma^3{}_{00} = 0$ (anterior com sinal trocado)

$\beta,\gamma,\delta = 0,3,3 \Rightarrow \Gamma^3{}_{03,3} - \Gamma^3{}_{03,3} + \Gamma^\mu{}_{03}\Gamma^3{}_{\mu 3} - \Gamma^\mu{}_{03}\Gamma^3{}_{\mu 3} = 0$ cancelam 2 a 2.

$\beta,\gamma,\delta = 3,0,0 \Rightarrow \Gamma^0{}_{30}\Gamma^3{}_{00} - \Gamma^0{}_{30}\Gamma^3{}_{00} = 0$

$\beta,\gamma,\delta = 3,0,3 \Rightarrow \Gamma^3{}_{33,0} - \Gamma^3{}_{30,3} + \Gamma^3{}_{33}\Gamma^3{}_{30} - \Gamma^0{}_{30}\Gamma^3{}_{03} = 0$

$\beta,\gamma,\delta = 3,3,0 \Rightarrow \Gamma^3{}_{30,3} - \Gamma^3{}_{33,0} + \Gamma^0{}_{30}\Gamma^3{}_{03} - \Gamma^3{}_{33}\Gamma^3{}_{30} = 0$

$\beta,\gamma,\delta = 3,3,3 \Rightarrow \Gamma^3{}_{33,3} - \Gamma^3{}_{33,3} + \Gamma^3{}_{33}\Gamma^3{}_{33} - \Gamma^3{}_{33}\Gamma^3{}_{33} = 0.$

Todos os componentes do tensor se anulam, e portanto o espaço tempo é plano.