Força de Lorenz e o tensor eletromagnético

A força gerada por uma combinação de campos elétricos e magnéticos é:

F = e.(**E** + **v** x **B**).

Exemplo 1: Um campo magnético uniforme está em repouso num laboratório, onde apenas a componente Bz vertical do campo é diferente de zero, e a carga elétrica tem apenas a componente horizontal vx do vetor velocidade. Como não há um campo elétrico, a fórmula calcula uma força fy = -e.vx.Bz. A força está na direção y negativa devido ao produto vetorial.

Exemplo 2: Para um observador no referencial da carga elétrica, o que há é uma carga estática, junto à qual um campo magnético uniforme se move na direção –x. Pela simetria da situação deve se produzir a mesma força na carga, mas ela não está agora se movendo num campo magnético. A única hipótese é que surja um campo elétrico E na direção -y com a mesma intensidade de vx.Bz, gerando a força fy = -e.E. Essa foi uma observação de Einstein, sobre a exigência do campo eletromagnético obedecer ao princípio da relatividade, levando a conclusão de que eletricidade e magnetismo são campos da mesma natureza, podendo trocar de forma dependendo do referencial.

Para deduzir a equação acima por meio de um lagrangiano, postula-se um campo vetorial A_μ, com quatro componentes, e que ao mudar de referencial, siga as transformações de Lorenz. As componentes do campo elétrico e magnético serão construídas a partir de suas derivadas.

O lagrangiano tem 2 componentes: 1 para a partícula que se desloca e outro para o campo e sua interação com ela. $\mathscr{L} = (-m.d\tau + e.dX^\mu.A_\mu)$. O primeiro termo corresponde à energia cinética e vem do princípio de integrar a partícula ao longo de seu deslocamento no espaço tempo $d\tau$.

$$(d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = dt.\sqrt{1 - dx^2/dt^2 - dy^2/dt^2 - dz^2/dt^2} = dt.\sqrt{1 - v^2})$$

O segundo termo representa a energia potencial, aquela oriunda de sua interação com o campo: $e.(dt.A_0 + dx.A_1 + dy.A_2 + dz.A_3) = e.dt.(A_0 + A_1.dx/dt + A_2.dy/dt + A_3.dz/dt)$. Como o lagrangiano é um escalar, é válido em qualquer referencial.

Aplicando as equações de Euler-Lagrange temos as derivada em relação à cada uma das velocidades:

$(m / \sqrt{1 - v^2}).vx + e.A_1$,

$(m / \sqrt{1 - v^2}).vy + e.A_2$,

$(m / \sqrt{1 - v^2}).vz + e.A_3$,

Seguindo com o método, é necessário agora derivar em relação ao tempo. Como os componentes do vetor potencial A são funções de x, y, z e t, devem não apenas ser derivados explicitamente em relação ao tempo como também implicitamente, já que as coordenadas da partícula são funções do tempo:

$d\,(\,m\,/\,\sqrt{1-v^2}\,).\,vx\,)\,/\,dt + e.\partial A_1/\partial t + e.(\,vx.\partial A_1/\partial x + vy.\partial A_1/\partial y + vz.\partial A_1/\partial z\,).$

$d\,(\,m\,/\,\sqrt{1-v^2}\,).\,vy\,)\,/\,dt + e.\partial A_2/\partial t + e.(\,vx.\partial A_2/\partial x + vy.\partial A_2/\partial y + vz.\partial A_2/\partial z\,).$

$d\,(\,m\,/\,\sqrt{1-v^2}\,).\,vz\,)\,/\,dt + e.\partial A_3/\partial t + e.(\,vx.\partial A_3/\partial x + vy.\partial A_3/\partial y + vz.\partial A_3/\partial z\,).$

Essas expressões devem ser iguais às derivadas correspondentes em relação aos eixos coordenados:

$e.(\,\partial A_0/\partial x + vx.\partial A_1/\partial x + vy.\partial A_2/\partial x + vz.\partial A_3/\partial x\,)$

$e.(\,\partial A_0/\partial y + vx.\partial A_1/\partial y + vy.\partial A_2/\partial y + vz.\partial A_3/\partial y\,)$

$e.(\,\partial A_0/\partial z + vx.\partial A_1/\partial z + vy.\partial A_2/\partial z + vz.\partial A_3/\partial z\,)$

As expressões contendo a raiz são equivalentes à m.a, portanto à força, que era o objetivo desejado, só que contendo correções relativísticas. Trabalhando agora com as demais:

$e.(\,\partial A_0/\partial x + vx.\partial A_1/\partial x + vy.\partial A_2/\partial x + vz.\partial A_3/\partial x - \partial A_1/\partial t - vx.\partial A_1/\partial x - vy.\partial A_1/\partial y - vz.\partial A_1/\partial z\,).$

$e.(\,\partial A_0/\partial y + vx.\partial A_1/\partial y + vy.\partial A_2/\partial y + vz.\partial A_3/\partial y - \partial A_2/\partial t - vx.\partial A_2/\partial x - vy.\partial A_2/\partial y - vz.\partial A_2/\partial z\,).$

$e.(\,\partial A_0/\partial z + vx.\partial A_1/\partial z + vy.\partial A_2/\partial z + vz.\partial A_3/\partial z) - \partial A_3/\partial t - vx.\partial A_3/\partial x - vy.\partial A_3/\partial y - vz.\partial A_3/\partial z\,).$

Eliminando os termos comuns e agrupando:

$e.(\,\partial A_0/\partial x - \partial A_1/\partial t + vy.(\,\partial A_2/\partial x - \partial A_1/\partial y\,) + vz.(\,\partial A_3/\partial x - \partial A_1/\partial z\,)$

$e.(\,\partial A_0/\partial y - \partial A_2/\partial t + vx.(\,\partial A_1/\partial y - \partial A_2/\partial x\,) + vz.(\,\partial A_3/\partial y - \partial A_2/\partial z\,)$

$e.(\,\partial A_0/\partial z - \partial A_3/\partial t + vx.(\,\partial A_1/\partial z - \partial A_3/\partial x\,) + vy.(\,\partial A_2/\partial z - \partial A_3/\partial y\,)$

O que é exatamente a força eletromagnética se associarmos:

$Ex = \partial A_0/\partial x - \partial A_1/\partial t,$

$Ey = \partial A_0/\partial y - \partial A_2/\partial t$

$Ez = \partial A_0/\partial z - \partial A_3/\partial t$

$Bx = \partial A_3/\partial y - \partial A_2/\partial z$

$By = \partial A_1/\partial z - \partial A_3/\partial x$

$Bz = \partial A_2/\partial x - \partial A_1/\partial y$

As equações em forma compacta são:

$d\,(\,m\,/\,\sqrt{1-v^2}\,).\,v^p\,)\,/\,dt = e.(\,\partial A_0/\partial x^p - \partial A_p/\partial t + \sum_{n=1}^{3} v^n(\frac{\partial A_n}{\partial x^p} - \frac{\partial A_p}{\partial x^n})),$

Onde, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ e $v^1 = v_x$, $v^2 = v_{y\,e}\, v^3 = v_z$

Essa equação, embora tenha partido de um lagrangiano com as 4 dimensões (t,x,y,z) e invariante em transformações de coordenadas no espaço-tempo porque é um escalar, só relaciona as 3 componentes espaciais da força magnética, e as derivadas estão em relação ao tempo calendário de um determinado referencial. Para torná-la explicitamente invariante, multiplica-se os 2 lados por $\partial t/\partial\tau$:

$d\,(\mathrm{m}/\sqrt{1-v^2}).\,\mathrm{v}^{\mathrm{p}})/dt.\,\partial t/\partial\tau = \mathrm{e}.\,\partial t/\partial\tau.(\,\partial A_0/\partial x^p - \partial A_p/\partial t + \sum_{n=1}^{3} v^n(\frac{\partial A_n}{\partial x^p} - \frac{\partial A_p}{\partial x^n}))$

Chamando agora ∂t de ∂X^0, e analisando as equações uma a uma:

$d\,(\mathrm{m}/\sqrt{1-v^2}).\,\mathrm{v}^1)/d\tau = \mathrm{e}.(\,\partial t/\partial\tau.(\,\partial A_0/\partial x^1 - \partial A_1/\partial x^0) + \partial t/\partial\tau.\,\sum_{n=1}^{3} v^n(\frac{\partial A_n}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^n}))$

$d\,(\mathrm{m}/\sqrt{1-v^2}).\,\mathrm{v}^2)/d\tau = \mathrm{e}.(\,\partial t/\partial\tau.(\,\partial A_0/\partial x^2 - \partial A_2/\partial x^0) + \partial t/\partial\tau.\,\sum_{n=1}^{3} v^n(\frac{\partial A_n}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^n}))$

$d\,(\mathrm{m}/\sqrt{1-v^2}).\,\mathrm{v}^3)/d\tau = \mathrm{e}.(\,\partial t/\partial\tau.(\,\partial A_0/\partial x^3 - \partial A_3/\partial x^0) + \partial t/\partial\tau.\,\sum_{n=1}^{3} v^n(\frac{\partial A_n}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^n}))$

Os termos tipo $\partial A_0/\partial x^p - \partial A_p/\partial x^0$ podem entrar no somatório, desde que n comece de zero, observando que v^0 = dt/dt = 1. A equação pode aparecer agora em forma compacta como:

$d\,(\mathrm{m}/\sqrt{1-v^2}).\,\mathrm{v}^{\mathrm{p}})/d\tau = \mathrm{e}.(\,\partial t/\partial\tau.\,\sum_{n=0}^{3} v^n(\frac{\partial A_n}{\partial x^p} - \frac{\partial A_p}{\partial x^n}))$.

Substituindo v^n pela sua definição $\frac{\partial X_n}{\partial x^0}$, e que $\frac{\partial X_n}{\partial x^0}.\,\partial t/\partial\tau = \partial X_n/\partial\tau = \mathrm{U}^n$, as componentes da velocidade relativística,

$d\,(\mathrm{m}/\sqrt{1-v^2}).\,\mathrm{v}^{\mathrm{p}})/d\tau = \mathrm{e}.(\,\sum_{n=0}^{3} U^n(\frac{\partial A_n}{\partial x^p} - \frac{\partial A_p}{\partial x^n}))$.

Temos ainda 3 equações. A quarta equação para permitir uma forma padrão de equação relativística seria:

$d\,(\mathrm{m}/\sqrt{1-v^2}).\,\mathrm{v}^0)/d\tau = \mathrm{e}.(\,\sum_{n=0}^{3} U^n(\frac{\partial A_n}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^n}))$.

Como as equações são invariantes e as 3 componentes de um quadrivetor são iguais às 3 componentes de um outro quadrivetor, o quarto componente também tem que ser igual. O significado dessa quarta equação é que a potência associada ao movimento da partícula no campo só depende das componentes do campo elétrico. Isso é evidente porque as forças associadas ao campo magnético são perpendiculares ao movimento e portanto não realizam trabalho.

A forma compacta final em forma de quadrivetor, e usando a convenção de soma de Einstein é:

$\mathrm{m}.d^2X_\mu/d\tau^2 = \mathrm{e}.dX^\nu/d\tau.(\,\partial A_\nu/\partial X^\mu - \partial A_\mu/\partial X^\nu)$

Podemos definir para cada μ e ν, a diferença: $\partial A_\nu/\partial X^\mu - \partial A_\mu/\partial X^\nu$ como componentes de um tensor $F_{\mu\nu}$.

Assim,

$F_{00} = \partial A_0/\partial X^0 - \partial A_0/\partial X^0 = 0$

$F_{01} = \partial A_1/\partial X^0 - \partial A_0/\partial X^1 = -Ex$

$F_{02} = \partial A_2/\partial X^0 - \partial A_0/\partial X^2 = -Ey$

$F_{03} = \partial A_3/\partial X^0 - \partial A_0/\partial X^3 = -Ez$

$F_{10} = \partial A_0/\partial X^1 - \partial A_1/\partial X^0 = Ex$

$F_{11} = \partial A_1/\partial X^1 - \partial A_1/\partial X^1 = 0$

$F_{12} = \partial A_2/\partial X^1 - \partial A_1/\partial X^2 = -Bz$

$F_{13} = \partial A_3/\partial X^1 - \partial A_1/\partial X^3 = By$

$F_{20} = \partial A_0/\partial X^2 - \partial A_2/\partial X^0 = Ey$

$F_{21} = \partial A_1/\partial X^2 - \partial A_2/\partial X^1 = Bz$

$F_{22} = \partial A_2/\partial X^2 - \partial A_2/\partial X^2 = 0$

$F_{23} = \partial A_3/\partial X^2 - \partial A_2/\partial X^3 = -Bx$

$F_{30} = \partial A_0/\partial X^3 - \partial A_3/\partial X^0 = Ez$

$F_{31} = \partial A_1/\partial X^3 - \partial A_3/\partial X^1 = -By$

$F_{32} = \partial A_2/\partial X^3 - \partial A_3/\partial X^2 = Bx$

$F_{33} = \partial A_3/\partial X^3 - \partial A_3/\partial X^0 = 0$

Podemos ver que $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico, mas como ter certeza de que é um tensor e covariante? Para ser um tensor, se for zero em um sistema de coordenadas deve ser zero em qualquer outro. Além disso, deve seguir a transformação de Lorenz na forma covariante.

Para saber como obter um tensor em outro referencial com movimento na direção x usando as transformações de Lorenz, usamos o fato de que um tensor pode ser construído como o produto de 2 vetores, de modo que cada componente $T_{\mu\nu} = A_\mu . B_\nu$.

Assim, $T_{00} = A_0.B_0$, $T_{01} = A_0.B_1$, $T_{10} = A_1.B_0$, $T_{11} = A_1.B_1$.

Usando a transformação de Lorenz na forma covariante para A e B,

$T'_{00} = A'_0.B'_0 = (A_0+v.A_1). (B_0+v.B_1) / (1-v^2) = (A_0.B_0 + v^2. A_1.B_1 + v.(A_0.B_1 + A_1.B_0)) / (1-v^2) = (T_{00} + v^2. T_{11} + v.(T_{01}+T_{10}))/ (1-v^2)$

$T'_{01} = A'_0.B'_1 = (A_0+v.A_1). (B_1+v.B_0) / (1-v^2) = (A_0.B_1 + v^2. A_1.B_0 + v.(A_0.B_0 + A_1.B_1)) / (1-v^2) = (T_{01} + v^2. T_{10} + v.(T_{00}+T_{11}))/ (1-v^2)$

$T'_{10} = A'_1.B'_0 = (A_1+v.A_0). (B_0+v.B_1) / (1-v^2)=(A_1.B_0 + v^2. A_0.B_1 + v.(A_1.B_1 + A_0.B_0)) / (1-v^2) = (T_{10} + v^2. T_{01} + v.(T_{00}+T_{11}))/ (1-v^2)$

$T'_{11} = A'_1.B'_1 = (A_1+v.A_0). (B_1+v.B_0) / (1-v^2)=(A_1.B_1 + v^2. A_0.B_0 + v.(A_0.B_1 + A_1.B_0)) / (1-v^2) = (T_{11} + v^2. T_{00} + v.(T_{01}+T_{10}))/ (1-v^2)$

De forma similar:

$T'_{02} = (T_{02} + v. T_{12})/ \sqrt{1-v^2}$

$T'_{03} = (T_{03} + v. T_{13})/ \sqrt{1-v^2}$

$T'_{20} = (T_{20} + v. T_{21})/ \sqrt{1-v^2}$

$T'_{30} = (T_{30} + v. T_{31})/ \sqrt{1-v^2}$

$T'_{12} = (T_{12} + v. T_{02})/ \sqrt{1-v^2}$

$T'_{21} = (T_{21} + v. T_{20})/ \sqrt{1-v^2}$

$T'_{13} = (T_{13} + v. T_{03})/ \sqrt{1-v^2}$

$T'_{31} = (T_{31} + v. T_{30})/ \sqrt{1-v^2}$

$T'_{22} = T_{22}$

$T'_{23} = T_{23}$

$T'_{32} = T_{32}$

$T'_{33} = T_{33}$

No caso do tensor $F_{\mu\nu}$,

$F'_{00} = (F_{00} + v^2. F_{11} + v.(F_{01}+F_{10}))/ (1-v^2) = (0 + v^2. 0 + v.(-Ex+Ex))/ (1-v^2) = 0$

$F'_{01} = (F_{01} + v^2. F_{10} + v.(F_{00}+F_{11}))/ (1-v^2)= (-Ex + v^2. Ex + v.(0-0))/ (1-v^2) = -Ex$

$F'_{10} = (F_{10} + v^2. F_{01} + v.(F_{00}+F_{11}))/ (1-v^2)= (Ex - v^2. Ex + v.(0-0))/ (1-v^2) = Ex$

$F'_{11} = (F_{11} + v^2. F_{00} + v.(F_{01}+F_{10}))/ (1-v^2)= (0 + v^2. 0 + v.(- Ex+Ex))/ (1-v^2) = 0$

$F'_{02} = (F_{02} + v. F_{12})/ \sqrt{1-v^2} = (-Ey - v.Bz) / \sqrt{1-v^2}$

$F'_{03} = (F_{03} + v. F_{13})/ \sqrt{1-v^2} = (-Ez - v.By) / \sqrt{1-v^2}$

$F'_{20} = (F_{20} + v. F_{21})/ \sqrt{1-v^2} = (Ey + v.Bz) / \sqrt{1-v^2}$

$F'_{30} = (F_{30} + v. F_{31})/ \sqrt{1-v^2} = (Ez + v.By) / \sqrt{1-v^2}$

$F'_{12} = (F_{12} + v. F_{02})/ \sqrt{1-v^2} = (-Bz - v.Ey) / \sqrt{1-v^2}$

$F'_{21} = (F_{21} + v. F_{20})/ \sqrt{1-v^2}$ = (Bz + v.Ey) / $\sqrt{1-v^2}$

$F'_{13} = (F_{13} + v. F_{03})/ \sqrt{1-v^2}$ = (By - v.Ez) / $\sqrt{1-v^2}$

$F'_{31} = (F_{31} + v. F_{30})/ \sqrt{1-v^2}$ = (-By + v.Ez) / $\sqrt{1-v^2}$

$F'_{22} = F_{22} = 0$

$F'_{23} = F_{23}$ = -Bx

$F'_{32} = F_{32}$ = Bx

$F'_{33} = F_{33} = 0$

Como os componentes transformados são combinações lineares dos campos do tensor original, caso o tensor seja zero, também o será o transformado. Além disso, ele mantém a propriedade de ser antissimétrico.

O mais interessante são as consequências da mudança de referencial. Para um observador em movimento com velocidade v na direção x, as componentes nessa direção dos campos elétricos e magnéticos do laboratório não se alteram. Mas as componentes y e z desses campos elétricos são modificadas pelas componentes z e y dos campos magnéticos, caso existam no laboratório. Mesmo que não existam componentes y e z de campo elétrico no laboratório, elas são medidas pelo referencial móvel, caso existam campos magnéticos nas direções z ou y.

Da mesma forma com as componentes y e z do campo magnético medidas no referencial móvel, que são afetadas pelas componentes z e y, caso essas existam no laboratório.

Em particular, no exemplo 2 mencionado no início do capítulo, vê-se que realmente surge um campo elétrico na direção y, atuando sobre a carga, que é vista como estática pelo observador que se move com ela. Para baixas velocidades, o fator $\sqrt{1-v^2}$ é praticamente 1, e o que aparece é um campo elétrico de magnitude - v.Bz, na direção y. O observador móvel vê portanto a mesma força f = -evxBz que é medida no laboratório. Mas a interpreta como f = eEy.

Equações de Maxwell

O capítulo anterior analisou como o campo eletromagnético determina o movimento de partículas carregadas. Agora vamos analisar como as cargas em movimento afetam o campo.

O Lagrangiano anterior tinha um componente para a partícula e outro para a interação partícula x campo. Agora ele deve ter um termo para o campo e outro para a interação entre as cargas e o campo. O tensor $F_{\mu\nu}$ expressa o campo numa forma invariante ou seja, seus componentes se alteram dependendo do observador conforme as transformações de Lorenz.

Uma sugestão para o Lagrangiano do campo é a contração desse tensor, ou seja: $F_{\mu\nu}. F^{\mu\nu}$. Expandindo seus termos: $F_{00}.F^{00} + F_{01}.F^{01} ... + F_{33}.F^{33}$. Todos os termos das diagonais são zero. Dos demais, os que contém um zero referem-se a campos elétricos, e seu produto fica com sinal negativo por causa da troca de sinal entre o tensor contravariante e o covariante. O resto se refere aos campos magnéticos, mantendo-se com sinal positivo.

O resultado da soma é $- 2E_x^2 - 2E_y^2 - 2E_z^2 + 2B_x^2 + 2B_y^2 + 2B_z^2$. Por convenção divide-se o resultado por 4 e inverte-se o sinal para formar o Lagrangiano do campo, expresso abaixo em forma condensada.

$$\mathscr{L}_{campo} = - 1/4.(\partial A_\nu/\partial X^\mu - \partial A_\mu/\partial X^\nu).(\partial A^\nu/\partial X^\mu - \partial A^\mu/\partial X^\nu) = ½ . (E^2 - B^2).$$

No caso da partícula do capítulo anterior, a integral representando a ação a ser minimizada era entre dois pontos do espaço-tempo. Agora o campo deve ser integrado ao longo de um volume do espaço tempo onde ele está presente.

Para analisar as cargas, esse mesmo volume é considerado como um meio contínuo, em que cada ponto do espaço-tempo está associado a uma densidade de carga (positiva ou negativa) e a um fluxo, ou corrente elétrica. A densidade de carga pode ser vista como um corte no tempo nas vizinhanças de um ponto. Como um balanço anual de uma empresa, é o retrato daquele momento. Mas a cada instante essa medida pode mudar, desde que um aumento da densidade de carga entre dois instantes infinitesalmente próximos no tempo seja acompanhado por um fluxo por unidade de área combinado vindo pelos eixos x, y e z. Ou seja, não só a densidade de carga se conserva, mas ela não pode variar e ser compensada por uma variação igual e em sentido oposto longe do ponto. A expressão matemática para isso é o conceito vetorial de divergência: $\nabla.\mathbf{j^m} = \partial j_x/\partial x + \partial j_y/\partial y + \partial j_z/\partial z = -d\rho/dt$. ρ é a densidade de carga e j_x, j_y e j_z as correntes nas 3 direções coordenadas. Podemos estender o conceito de corrente, considerando que uma dada densidade de carga, mesmo que não varia, está "fluindo no tempo". Assim $\mathbf{J}^\mu = (J^0, J^1, J^2, J^3) = (\rho, j_x, j_y, j_z)$. Só porque foi representada com quatro componentes, isso não significa que $\mathbf{J}^\mu$ é um quadrivetor. É preciso mostrar que ele satisfaz as transformações de Lorenz na mudança de coordenadas.

Para um referencial R' se movendo com velocidade v na direção x, a quantidade de cargas dentro de um volume elementar não se altera. Supondo que as cargas estão em repouso no laboratório, $\mathbf{J}^\mu = (\rho, 0, 0, 0)$. Para R', a densidade aumenta pois o volume elementar sofre contração na direção x. R' também vê essa densidade de carga ρ' movendo-se com velocidade –v na direção x. Portanto vê uma densidade de corrente $-v.\ \rho'$. A expressão para $\mathbf{J}'^\mu$ é ($\rho/\sqrt{1-v^2}$, $-v.\ \rho/\sqrt{1-v^2}$, 0, 0), seguindo portanto a transformação de Lorenz.

Uma sugestão para o lagrangiano da interação entre o campo e as cargas é: $\mathscr{L}_{\text{carga}} = \mathbf{A}_\mu.\ \mathbf{J}^\mu = A_0.J^0 + A_1.J^1 + A_2.J^2 + A_3.J^3$. Cada componente do vetor potencial é ponderado pelo respectivo valor de corrente para formar o escalar.

Somando os dois lagrangianos:

$$\mathscr{L}_{\text{total}} = -1/4\ .\ \mathbf{F}_{\mu\nu}.\ \mathbf{F}^{\mu\nu} + \mathbf{A}_\mu.\ \mathbf{J}^\mu$$

Expandindo os termos, inclusive os campos elétricos e magnéticos em função das derivadas de A:

$$\mathscr{L}_{\text{total}} = -1/4.(\partial A_\nu/\partial X^\mu - \partial A_\mu/\partial X^\nu).(\partial A^\nu/\partial X^\mu - \partial A^\mu/\partial X^\nu)$$
$$+ A_0.J^0 + A_1.J^1 + A_2.J^2 + A_3.J^3.$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange, é preciso derivar $\mathscr{L}_{total}$ em relação a cada uma das derivadas parciais de A. E o resultado dessa operação ser derivado por cada X^ν, somando-se então esses termos.

Por exemplo, para os termos referentes aos campos magnéticos, onde μ e ν variam de 1 a 3, os vetores covariantes são iguais aos contravariantes. E cada termo aparece 2 vezes, quando no somatório, os valores de μ e ν se inverterem. O resultado da derivação é sempre o próprio $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ nesses casos.

No caso dos termos referentes aos campos elétricos ocorre a mesma coisa.

O passo seguinte fazer somatórios das derivadas dos $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ em relação aos X^ν. Esses somatórios dever ser igualados às derivadas em relação aos A_μ. Como os A_μ só aparecem multiplicando os termos da corrente, essas derivadas são as próprias correntes.

Assim,

$$- \partial\mathbf{F}_{00}/\partial X^0 - \partial\mathbf{F}_{01}/\partial X^1 - \partial\mathbf{F}_{02}/\partial X^2 - \partial\mathbf{F}_{03}/\partial X^3 = J^0$$

$$- \partial\mathbf{F}_{10}/\partial X^0 - \partial\mathbf{F}_{11}/\partial X^1 + \partial\mathbf{F}_{12}/\partial X^2 + \partial\mathbf{F}_{13}/\partial X^3 = J^1$$

$$- \partial\mathbf{F}_{20}/\partial X^0 + \partial\mathbf{F}_{21}/\partial X^1 + \partial\mathbf{F}_{22}/\partial X^2 + \partial\mathbf{F}_{23}/\partial X^3 = J^2$$

$$- \partial\mathbf{F}_{30}/\partial X^0 + \partial\mathbf{F}_{31}/\partial X^1 + \partial\mathbf{F}_{32}/\partial X^2 + \partial\mathbf{F}_{33}/\partial X^3 = J^3$$

Substituindo os valores de $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ pelos símbolos dos campos, os X^μ pelas letras das coordenadas, e observando que $\mathbf{F}_{\mu\mu} = 0$,

$$\partial Ex/\partial x + \partial Ey/\partial y + \partial Ez/\partial z = J^0$$

$$-\partial Ex/\partial t + \partial By/\partial z - \partial Bz/\partial y = J^1$$

$$-\partial Ey/\partial t + \partial Bz/\partial x - \partial Bx/\partial z = J^2$$

$$-\partial Ez/\partial t + \partial Bx/\partial z - \partial By/\partial x = J^3$$

A primeira expressão corresponde a equação de Maxwell: $\nabla.\mathbf{E} = \rho$

As 3 seguintes à outra equação de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} - \partial\mathbf{E}/\partial t = \mathbf{j}$

Existem mais 2 equações de Maxwell que resultam simplesmente do fato dos campos **E** e **B** terem sido definidos a partir do vetor potencial **A**.

Por exemplo, pela definição dos componentes de **B**, resulta que este é o rotacional de **A.** Como é uma identidade vetorial que a divergência de um rotacional é zero, temos mais uma equação de Maxwell: $\nabla.\mathbf{B} = 0$.

A equação remanescente deriva do fato de que:

$Ex = \partial A_0/\partial X^1 - \partial A_1/\partial X^0 = -(\partial A_1/\partial t - \partial A_0/\partial X^1)$

$Ey = \partial A_0/\partial X^2 - \partial A_2/\partial X^0 = -(\partial A_2/\partial t - \partial A_0/\partial X^2)$

$Ez = \partial A_0/\partial X^3 - \partial A_3/\partial X^0 = -(\partial A_3/\partial t - \partial A_0/\partial X^3)$

Em forma vetorial isso pode ser escrito como:

$\mathbf{E} = -\partial A/\partial t + \nabla A_0$, ou seja a soma da derivada em relação ao tempo do vetor A, (considerado apenas quanto aos 3 componentes espaciais), com o gradiente do escalar A_0.

Se fizermos o rotacional de **E**:

$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial (\nabla \times A) / \partial t + \nabla \times \nabla A_0$.

O último termo é o rotacional de um gradiente, e é identicamente igual a zero.

Como $\nabla \times A$ é o campo magnético, temos finalmente:

$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial B/\partial t$, ou $\nabla \times \mathbf{E} + \partial B/\partial t = 0$

Ondas eletromagnéticas.

As equações de Maxwell expressam relações entre E e B. Através de substituições, é possível gerar outras equações.

Por exemplo, a derivando-se em relação ao tempo a equação $\nabla \times \mathbf{B} - \partial \mathbf{E}/\partial t = \mathbf{j}$, temos $\nabla \times \partial \mathbf{B}/\partial t - \partial^2 \mathbf{E}/\partial t^2 = d\mathbf{j}/dt$.

Usando agora a equação:

$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial B/\partial t$,

$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \partial^2 \mathbf{E}/\partial t^2 + d\mathbf{j}/dt = 0$

A operação de duplo rotacional de um vetor é equivalente ao gradiente da divergência menos o laplaciano: $\nabla(\nabla.\mathbf{E}) - \nabla^2 E + \partial^2 \mathbf{E}/\partial t^2 + d\mathbf{j}/dt = 0$

Usando finalmente a equação:

$\nabla.\mathbf{E} = \rho$, resultando em 3 equações diferenciais, uma para cada componente de E:

$\partial^2 Ex/\partial t^2 - \partial^2 Ex/\partial x^2 - \partial^2 Ex/\partial y^2 - \partial^2 Ex/\partial z^2 + \partial\rho/\partial x + dj_x/dt = 0$

$\partial^2 Ey/\partial t^2 - \partial^2 Ey/\partial x^2 - \partial^2 Ey/\partial y^2 - \partial^2 Ey/\partial z^2 + \partial\rho/\partial y + dj_y/dt = 0$

$\partial^2 Ez/\partial t^2 - \partial^2 Ez/\partial x^2 - \partial^2 Ez/\partial y^2 - \partial^2 Ez/\partial z^2 + \partial\rho/\partial z + dj_z/dt = 0$

O mesmo pode ser feito em relação ao campo magnético, a partir da equação: $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$. Derivando em relação ao tempo:

$\partial^2 \mathbf{B}/\partial t^2 + \nabla \times \partial \mathbf{E}/\partial t = 0$

Usando que $\nabla \times \mathbf{B} - \partial \mathbf{E}/\partial t = \mathbf{j}$,

$\partial^2 \mathbf{B}/\partial t^2 + \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{j} = 0$

Expandindo o duplo rotacional:

$\partial^2 \mathbf{B}/\partial t^2 + \nabla(\nabla.\mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{j} = 0$

Finalmente usando a equação $\nabla.\mathbf{B} = 0$, resultam 3 equações com os componentes do vetor **B**:

$$\partial^2 Bx/\partial t^2 - \partial^2 Bx/\partial x^2 - \partial^2 Bx/\partial y^2 - \partial^2 Bx/\partial z^2 – (\partial j_y/\partial z - \partial j_z/\partial y) = 0$$

$$\partial^2 By/\partial t^2 - \partial^2 By/\partial x^2 - \partial^2 By/\partial y^2 - \partial^2 By/\partial z^2 – (\partial j_z/\partial x - \partial j_x/\partial z) = 0$$

$$\partial^2 Bz/\partial t^2 - \partial^2 Bz/\partial x^2 - \partial^2 Bz/\partial y^2 - \partial^2 Bz/\partial z^2 – (\partial j_x/\partial y - \partial j_y/\partial z) = 0$$

Se não houver cargas nem correntes, no vácuo por exemplo, temos simplesmente a equação de onda eletromagnética. Até num meio sólido, desde que sem gradiente de cargas ou correntes, a onda eletromagnética pode estar presente, como é o caso de alguns materiais como o vidro. São transparentes. Já num condutor, onde há elétrons livres em abundância, a energia do campo eletromagnético variável é absorvida para acelerar essas cargas. Não há condutores transparentes.

Usa-se aqui sempre unidades em que a velocidade da luz é igual a 1. Também não são usadas as constantes de permeabilidade elétrica ou magnética, que derivam das unidades de medidas empregadas.