

A finalidade do estudo a seguir é aplicar o modelo da mecânica estatística à distribuição de renda em economia. A matemática é exatamente a mesma, e apenas os nomes das variáveis mudam. Onde se fala em energia passa a se falar de renda. E em vez de partículas fala-se de pessoas.

1) Distribuição de Boltzmann – formação dos grupos de renda

Separando a população de um país por faixa de renda, definimos o parâmetro R_k como uma determinada renda média anual. Assim R_1 é a renda média do grupo mais pobre da população, R_2 o grupo seguinte e assim por diante. O pertencimento a cada grupo é definido por estar entre um nível mínimo e um nível máximo de renda. A diferença entre esses valores é constante para todos os grupos.

Assim por exemplo, se cada faixa tiver uma largura de 1000 reais, no grupo $k=1$ estarão todos os que ganham anualmente entre 0 e 1000 reais por ano. A renda média desse grupo é de 500 reais. No grupo $k = 10$ estarão todos os que ganham entre 9000 e 10000 reais por ano, e a renda média do grupo é de 9500 reais.

O parâmetro N designa o número total de habitantes do país, e a variável N_k quantas pessoas pertencem ao grupo k .

Os critérios pelos quais as pessoas se dividem pelos grupos, dependem de informações fora do modelo estatístico. O que o modelo fornece é o componente aleatório dessa distribuição, seja qual forem os critérios. As condicionantes são que cada pessoa seja alocada em algum grupo, e que a soma das rendas de todos seja a renda nacional.

Um exemplo de critério é supor que as chances de uma pessoa estar em um dado grupo seja a mesma de estar em qualquer outro. Nesse caso, se uma mesma distribuição de renda pode ser alcançada de várias maneiras, ela é mais provável que outra em que o número de variações é menor.

Por exemplo, só há uma possibilidade para que todos estejam na mesma faixa de renda:

$$R = NR_k$$

Já se houver vários grupos, os membros de cada um deles podem variar, Pedro pode estar no grupo 10 e a Carol no grupo 8 ou o contrário, que aumenta rapidamente o número de combinações possíveis.

$$R = \sum N_k R_k$$

Assim sendo, uma distribuição não igualitária é mais provável que uma igualitária, para uma mesma renda média.

Para quantificar essas probabilidades, a alocação das pessoas nos grupos é analisada, considerando como variável o número de pessoas N_k em cada um deles. O método para isso é supor uma dada distribuição, e contar de quantas maneiras ela pode ser feita:

1) Supondo um dado número de pessoas N_1 para o grupo R_1 , o total de modos possíveis $M(1)$ em que isso pode ser feito é a primeira vista:

$$M(1) = N(N-1)\dots(N-N_1)$$

pois para a primeira vaga há N pessoas disponíveis, para a segunda sobram $N-1$, até que as N_1 vagas tenham sido preenchidas. Mas uma vez que um determinado grupo foi formado, vê-se que a terceira pessoa escolhida poderia ter sido a primeira por exemplo, e a primeira ter sido a terceira. O

resultado seria o mesmo grupo. Portanto deve-se dividir por todas as permutações possíveis do grupo formado:

$$M(1) = N(N-1)\dots(N-N_1) / N_1! = N! / ((N-N_1)!N_1!)$$

O processo é repetido para o segundo grupo, só que agora restam apenas $N - N_1$ pessoas a serem distribuídas pelo novo grupo:

$$M(2) = (N-N_1)! / ((N-N_1-N_2)!N_2!)$$

Para o terceiro:

$$M(3) = (N-N_1-N_2)! / ((N-N_1-N_2-N_3)!N_3!)$$

O procedimento se repete até que as N pessoas tenham sido alocadas para uma dada escolha (arbitrária) $N_1, N_2, N_3, \dots, N_m$ da distribuição de pessoas para cada grupo.

O número total de modos possíveis para essa escolha é dada pela multiplicação:

$$M_T = M(1)M(2)\dots M(m)$$

pois as seleções para os grupos seguintes independem dos anteriores. Para cada configuração anterior há todo um leque de configurações posteriores a serem contadas.

Portanto:

$$M_T = N! / ((N-N_1)!N_1!) * (N-N_1)! / ((N-N_1-N_2)!N_2!) * (N-N_1-N_2)! / ((N-N_1-N_2-N_3)!N_3!) \dots$$

Os termos com as diferenças de fatoriais se cancelam, restando:

$$M_T = N! / ((N_1! * N_2! * N_3! \dots N_m!))$$

É interessante notar que não há problema se alguns dos grupos não tem pessoa alguma, pois o fatorial de zero é 1.

Se alterarmos a definição dos números de pessoas por grupo para:

$$N_1', N_2', N_3' \dots N_m'$$

Teremos um outro valor para M_T .

Esse processo pode ser feito para qualquer seleção do número de membros de cada grupo, formando assim uma coleção de tipos de alocação de pessoas, cada uma associada a um valor de M_T . As únicas restrições são que o somatório das pessoas dos grupos deve ser a população total, e que somando as rendas parciais dos grupos (número de membros x renda média do grupo), o resultado deve ser a renda total.

A distribuição de Boltzmann é aquela em que M_T é máximo. Presume-se que esse conjunto de N_k 's é o mais provável de ocorrer na realidade. A ideia é semelhante a lançar 2 dados e avaliar a probabilidade da soma dos resultados. Evidentemente é mais provável que a soma seja 7 (que pode ser obtida com 1 e 6 ou 2 e 5 ou 3 e 4 ou 4 e 3 ou 5 e 2 ou 6 e 1) do que 12 (só 6 e 6).

2) Distribuição de Boltzmann – maximização de probabilidades

Agora podemos equacionar o problema em definitivo. Trata-se de maximizar a função $M_T(N_1, N_2, \dots, N_m)$ de m variáveis, sujeita a 2 restrições:

$$\sum N_k = N \quad (1)$$

$$\sum N_k R_k = R \quad (2)$$

O método padrão para resolver esse tipo de maximização com restrições é o dos multiplicadores de Lagrange (ver anexo 1).

As funções de restrição são:

$$g(N_1, N_2, \dots, N_m) = \sum N_k - N$$

$$h(N_1, N_2, \dots, N_m) = \sum N_k R_k - R$$

O método direto seria derivar e igualar a zero uma combinação linear da função principal com g e h para cada valor de k :

$$\partial(M_T - \lambda_1 g - \lambda_2 h) / \partial N_k = 0$$

Onde λ_1 e λ_2 são parâmetros a determinar.

Entretanto M_T é uma função de variáveis discretas. Para aplicar o método usa-se a aproximação de Stirling (ver anexo 2) para o logaritmo do fatorial, transformando-a em uma função de variável contínua.

$\log(k!) \sim k \log(k) - k$, que é tanto mais precisa quanto maiores são os valores de k .

A função a ser maximizada passa a ser $\log(M_T)$. A observação no anexo 1 mostra que o mesmo ponto de máximo, sob as restrições da função M_T , também é máximo da função $\log(M_T)$.

$$\partial(\log(M_T) - \lambda_1 g - \lambda_2 h) / \partial N_k = 0 \Rightarrow$$

$$\partial \log(N! / (N_1! * N_2! * \dots * N_m!)) / \partial N_k - \lambda_1 \partial g / \partial N_k - \lambda_2 \partial h / \partial N_k = 0 \Rightarrow$$

$$\partial(\log(N!) - \log(N_1!) - \log(N_2!) - \dots - \log(N_m!)) / \partial N_k - \lambda_1 \partial g / \partial N_k - \lambda_2 \partial h / \partial N_k = 0 \Rightarrow$$

$$\partial(N \log(N) - N - (N_1 \log(N_1) - N_1) - (N_2 \log(N_2) - N_2) - \dots - N_m \log(N_m) - N_m) / \partial N_m - \lambda_1 - \lambda_2 R_k = 0$$

Como:

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_m$$

$$\partial(N \log(N) - N_1 \log(N_1) - N_2 \log(N_2) - \dots - N_m \log(N_m)) / \partial N_m - \lambda_1 - \lambda_2 R_k = 0$$

Portanto, para cada k :

$$-\log(N_k) - 1 - \lambda_1 - \lambda_2 R_k = 0$$

Observe-se que a observação feita anteriormente de que os grupos poderiam estar vazios não é mais válida, pois $\log(0)$ não é definido.

Exponenciando a equação:

$$N_k = \exp(-(1 + \lambda_1)) \exp(-\lambda_2 R_k)$$

Por conveniência fazemos uma mudança de variáveis:

$$Z = \exp((1+\lambda_1))$$

$$\beta = \lambda_2$$

=>

$$N_k = (1/Z)\exp(-\beta R_k) \quad (3)$$

Usa-se agora a informação proporcionada pela primeira restrição ($\sum N_k = N$), somando para todos os k 's, e obtendo uma equação relacionando Z e β , já que a população total N é suposta como conhecida.

$$Z = (1/N)\sum(\exp(-\beta R_k)) \quad (4)$$

A maximização obtida é uma função da renda R , considerada fixa. Assim para cada R , haverá um resultado. O multiplicador de Lagrange $\lambda_2 = \beta$ reflete essa dependência do resultado em relação à R . A equação acima, que apresenta $Z = f(\beta)$, expressa a liberdade na escolha da renda, e deve ser possível explicitar uma relação entre R e a equação (4).

Considerando então β como uma variável, podemos derivar Z em relação a β :

$$\partial Z / \partial \beta = (1/N)\sum(-R_k \exp(-\beta R_k))$$

Mas para cada N_k ,

$$N_k = (1/Z)\exp(-\beta R_k)$$

Portanto:

$$\partial Z / \partial \beta = (1/N)\sum(-R_k Z N_k) = -(Z/N)\sum(R_k N_k) = -(Z/N)R$$

Como R/N é a renda per capita, vamos chamá-la de $\langle R \rangle$.

$$\partial Z / \partial \beta = -Z \langle R \rangle$$

Chegamos pois à relação entre a renda e a dependência de Z em relação a β :

$$\langle R \rangle = -\partial \log(Z) / \partial \beta \quad (5)$$

Para eliminar o valor de β , é preciso definir os R_k 's, as faixas de renda, e explicitar o somatório da expressão (4). A partir daí teremos 2 equações (4) e (5) e 2 incógnitas (Z e β).

Esse é o momento em que informações de fora do modelo são importantes. Porque são elas que determinarão como são as faixas de renda, e como as pessoas se distribuem por elas. Abaixo são discutidas 2 possibilidades extremas. Uma em que a renda é função do trabalho, e por consequência existe uma renda máxima, dadas as limitações físicas do ser humano. Outra onde a renda depende do acaso, como por exemplo a renda da família onde se nasce.

3) Renda é função do trabalho e existe uma faixa máxima:

Consideramos aqui que a renda de cada um depende linearmente da produtividade de seu trabalho, incluindo aí os estudos necessários para atingi-la. E que o valor das mercadorias e serviços é basicamente função do trabalho dispendido em sua produção. Como há um limite físico para o trabalho de cada um, (soma do tempo disponível para estudo e trabalho), há um limite para a faixa máxima de renda:

Como consideramos todos os intervalos de renda iguais e a relação é linear, podemos escrever:
 $R_k = R_1 + k\Delta R$

onde ΔR é o tamanho do intervalo de renda. A expressão (4) se torna:

$$Z = (1/N)\sum_0^{m-1}(\exp(-\beta(R_1 + k\Delta R))) = \\ = (1/N)[(\exp(-\beta R_1)) + \exp(-\beta(R_1))\exp(-\beta\Delta R) + \dots + \exp(-\beta(R_1))\exp(-(m-1)\beta\Delta R)]$$

O somatório é o de uma progressão geométrica, onde a razão é $\exp(-\beta\Delta R)$. Aplicando a fórmula da soma de uma PG:

$$Z = (1/N)\sum_0^{m-1}(\exp(-\beta(R_1 + k\Delta R))) = (1/N)\exp(-\beta R_1)(1 - (\exp(-\beta\Delta R))^m)/(1 - \exp(-\beta\Delta R))$$

Aplicando o logarítmo e derivando em relação a β , podemos eliminar Z usando (5).

$$\log(Z) = -\beta R_1 + \log(1 - \exp(-m\beta\Delta R)) - \log(1 - \exp(-\beta\Delta R)) - \log(N) \Rightarrow$$

$$-\partial\log(Z)/\partial\beta = R_1 - m\Delta R\exp(-m\beta\Delta R)/(1 - \exp(-m\beta\Delta R)) + \Delta R\exp(-\beta\Delta R)/(1 - \exp(-\beta\Delta R)) \Rightarrow$$

$$\langle R \rangle = R_1 - m\Delta R\exp(-m\beta\Delta R)/(1 - \exp(-m\beta\Delta R)) + \Delta R\exp(-\beta\Delta R)/(1 - \exp(-\beta\Delta R))$$

Alguns resultados desse modelo são mostrados a seguir:

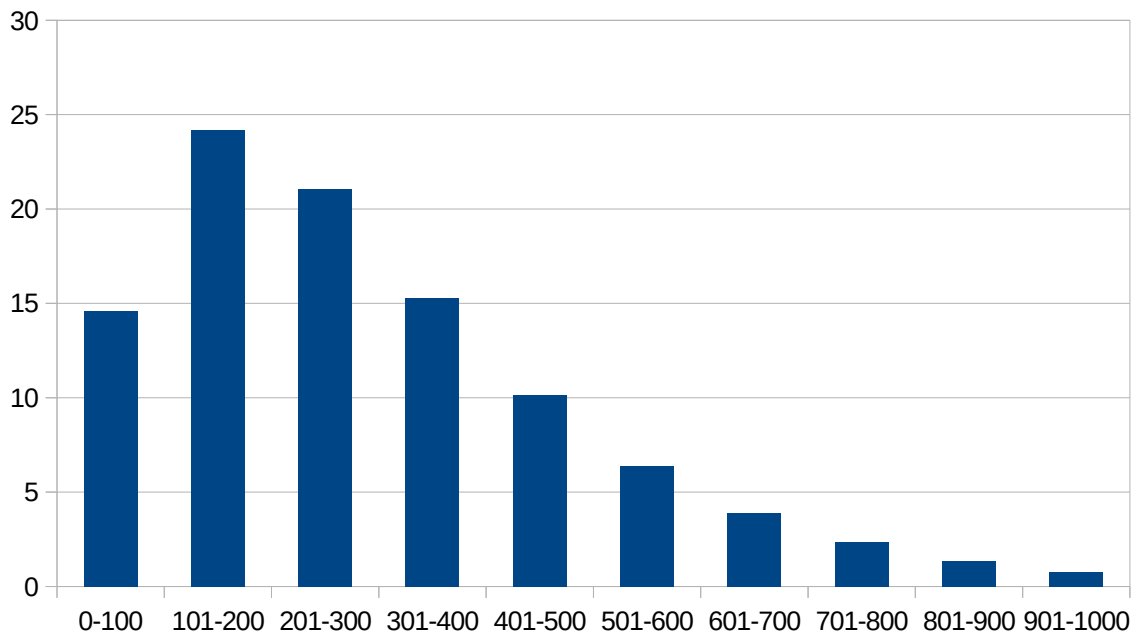
Exemplo 3.1:

| | |
|--------------------------------------|-------------|
| Renda per capita $\langle R \rangle$ | = 150 |
| Renda máxima | = 1000 |
| Renda mínima R_1 | = 1 |
| Intervalo ΔR | = 1 |
| m | = 1000 |
| População N | = 200000000 |

A equação transcendente, resolvida iterativamente resulta em:

$$\beta = 0,00663$$

Agrupando graficamente os intervalos, de modo a dividir a população em 10 intervalos, onde na ordenada é indicado o percentual da população naquela faixa é:



Exemplo 3.2:

Renda per capita $\langle R \rangle = 500$

Renda máxima = 1000

Renda mínima $R_1 = 1$

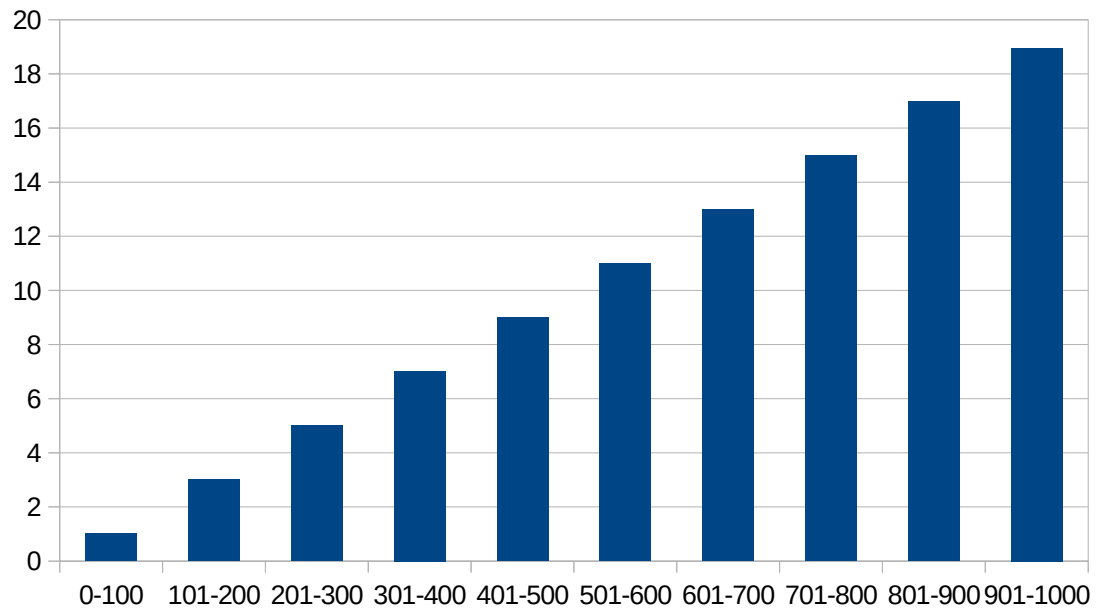
Intervalo $\Delta R = 1$

$m = 1000$

População $N = 200000000$

A equação transcendente, resolvida iterativamente resulta em:

$\beta = 0,000006$



Exemplo 3.3:

Renda per capita $\langle R \rangle = 700$

Renda máxima = 1000

Renda mínima $R_1 = 1$

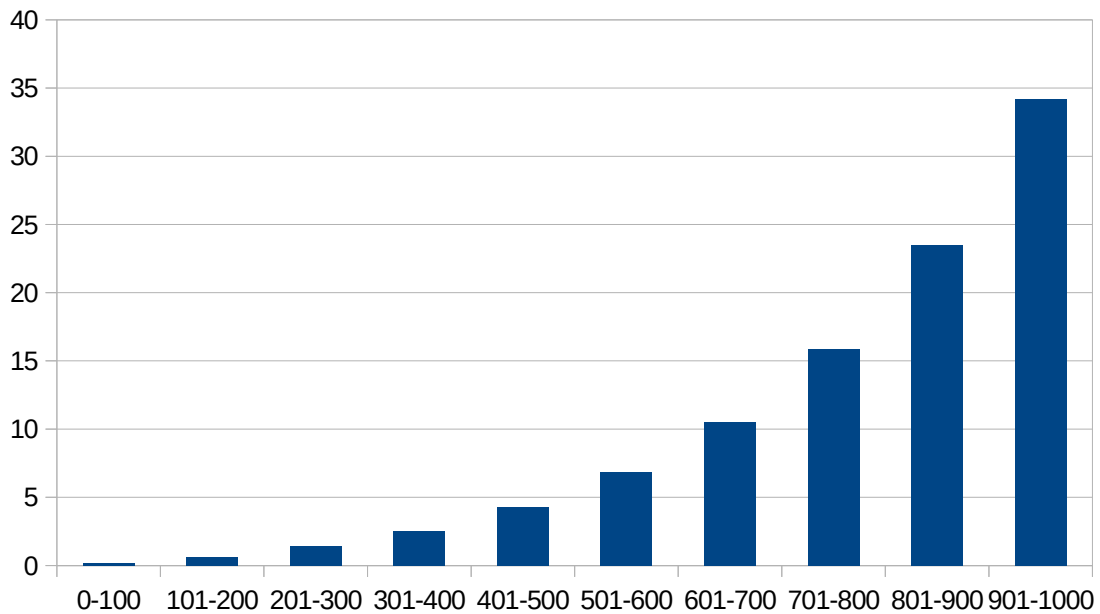
Intervalo $\Delta R = 1$

$m = 1000$

População $N = 200000000$

A equação transcendente, resolvida iterativamente resulta em:

$\beta = -0,00266$



O perfil de distribuição de renda da população vai depender da produtividade média do trabalho, o que também define a renda média. Se há poucos que se dedicam ao trabalho, a renda é mais concentrada, (primeiro gráfico). Se há muitos, ela é mais distribuída (último gráfico).

4) Renda é função da “sorte”, sem limite máximo

Consideramos aqui que a renda de cada um depende antes de tudo de fatores aleatórios como ter um talento nato, ganhar na loteria, ou ter nascido numa família rica. Ou inversamente o azar de ter nascido pobre, não ter talento para nada em especial, ou ter perdido os pais na infância. Um efeito disso é que não há uma limitação clara quanto à riqueza máxima, já que ela não depende ou depende pouco do tempo de trabalho e estudo de cada um.

Supondo uma dependência linear como no caso anterior, da mesma forma o resultado é a soma de uma PG, só que sem o limite superior. A soma se torna:

$$Z = (1/N)\sum_0^{m-1}(\exp(-\beta(R_1 + k\Delta R))) = (1/N)\exp(-\beta R_1)/(1 - \exp(-\beta\Delta R))$$

Aplicando o logaritmo e derivando em relação a β :

$$\log(Z) = -\beta R_1 - \log(1 - \exp(-\beta\Delta R)) - \log(N) \Rightarrow$$

$$-\partial\log(Z)/\partial\beta = R_1 + \Delta R \exp(-\beta\Delta R)/(1 - \exp(-\beta\Delta R)) \Rightarrow$$

A expressão final é:

$$\langle R \rangle = R_1 + \Delta R \exp(-\beta\Delta R)/(1 - \exp(-\beta\Delta R))$$

O resultado desse modelo são mostrados a seguir. As curvas são exatamente iguais, exceto por um fator de escala devido à mudança da renda média. Por isso basta mostrar um caso.

Exemplo 4:

Renda per capita $\langle R \rangle = 150$

Renda máxima = sem limite

Renda mínima $R_1 = 1$

Intervalo $\Delta R = 1$

$m =$ indefinido

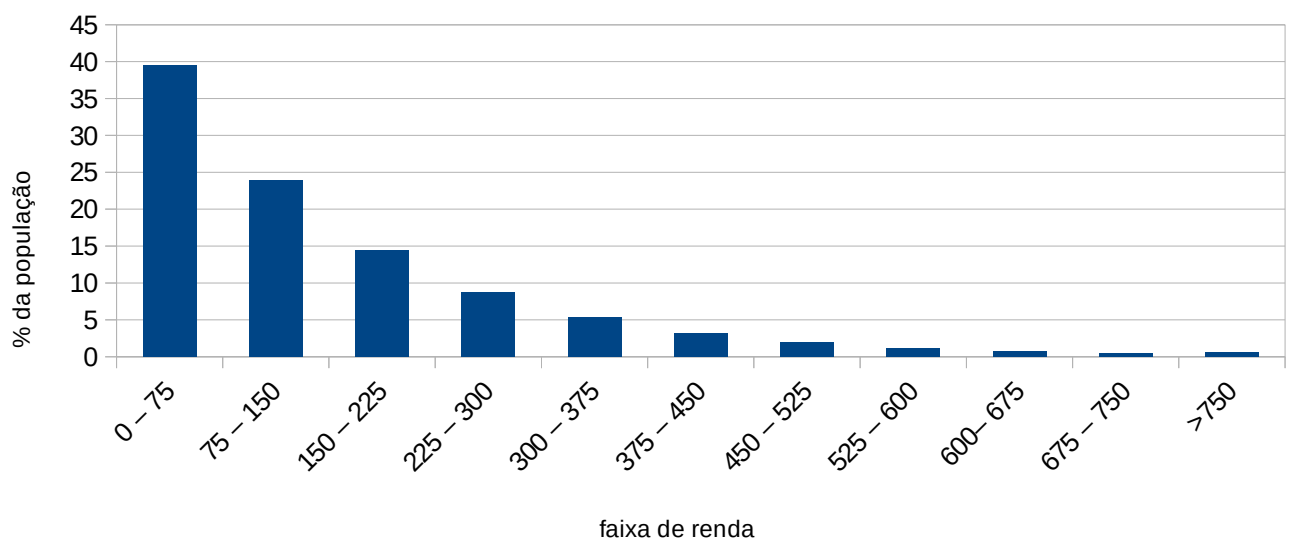
População $N = 200000000$

A equação transcendente, resolvida iterativamente resulta em:

$\beta = 0,00669$

distribuição de renda

renda média 150



Esse modelo proporciona um decaimento exponencial da proporção de pessoas por faixa de renda, com uma grande concentração na primeira faixa.

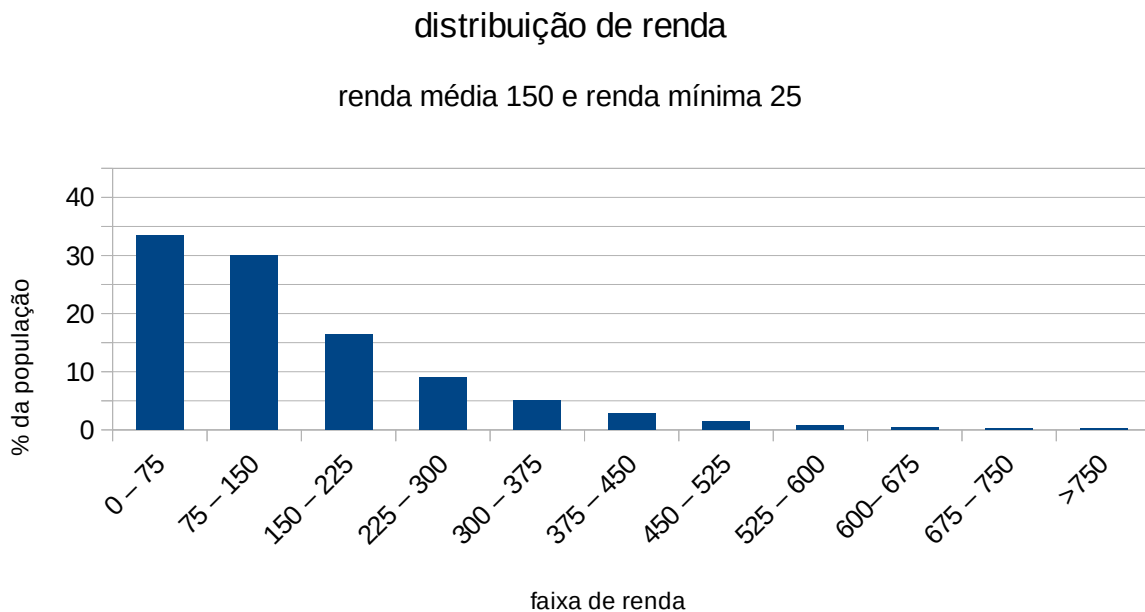
5) Renda é função da “sorte”, sem limite máximo, mas com uma renda mínima

A única diferença em relação ao caso anterior é que ninguém ganha abaixo de um determinado valor, para uma dada renda média. Isso pode ter origem em políticas governamentais. Por exemplo, se houver um sistema organizado de aposentadorias, muitos idosos terão renda sem depender de seus familiares. Isso também acontece de modo geral nos casos de incapacitação para o trabalho. Outro fator é o trabalho feminino. Quanto mais mulheres tenham renda própria, menor o grupo de pessoas sem renda.

Exemplo 5.1:

Renda per capita $\langle R \rangle = 150$
Renda máxima = sem limite
Renda mínima $R_1 = 25$
Intervalo $\Delta R = 1$
 $m =$ indefinido
População $N = 200000000$

A equação transcendente, resolvida iterativamente resulta em:
 $\beta = 0,00797$



Exemplo 5.2:

Renda per capita $\langle R \rangle = 150$

Renda máxima = sem limite

Renda mínima $R_1 = 50$

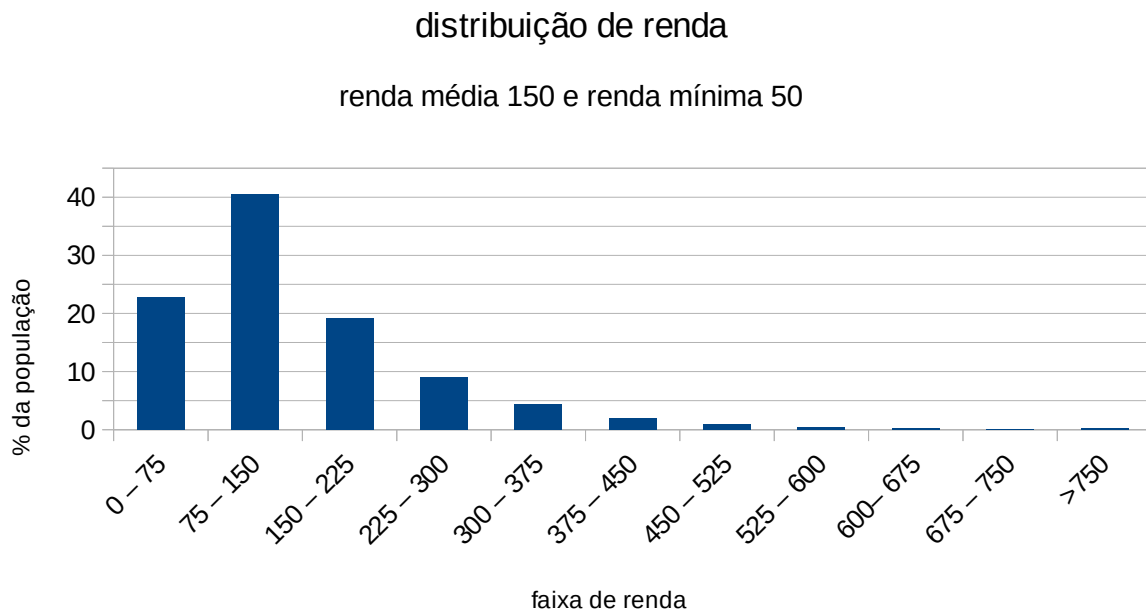
Intervalo $\Delta R = 1$

$m =$ indefinido

População $N = 200000000$

A equação transcendente, resolvida iterativamente resulta em:

$\beta = 0,00995$



O efeito de uma renda mínima é tornar a parte esquerda do histograma mais próxima de uma distribuição normal, diminuindo a população mais pobre.

5) Coeficiente de Gini

Nas distribuições anteriores a variável independente é a faixa de renda, e para cada uma delas calcula-se o valor mais provável da fração de pessoas a ela pertencentes.

Uma outra forma de gráfico é, após ordenar a população do mais pobre ao mais rico, usar como variável independente a fração de pessoas mais pobres, e como variável dependente a fração da renda total detida por esse grupo de pessoas. Chamam-se gráficos de Lorentz.

Ex: os 20% mais pobres detém 10% da renda total, os 50% mais pobres 30% da renda total e assim por diante.

Se todos estiverem num único grupo de renda esse gráfico será linear porque a cada percentual da população mais pobre corresponderá o mesmo percentual da renda total. A partir daí, quando mais concentrada a renda, maior a curvatura.

O número chamado coeficiente de Gini está associado à razão entre a área sob a curva (A_C) e a área sob o gráfico linear (A_L)

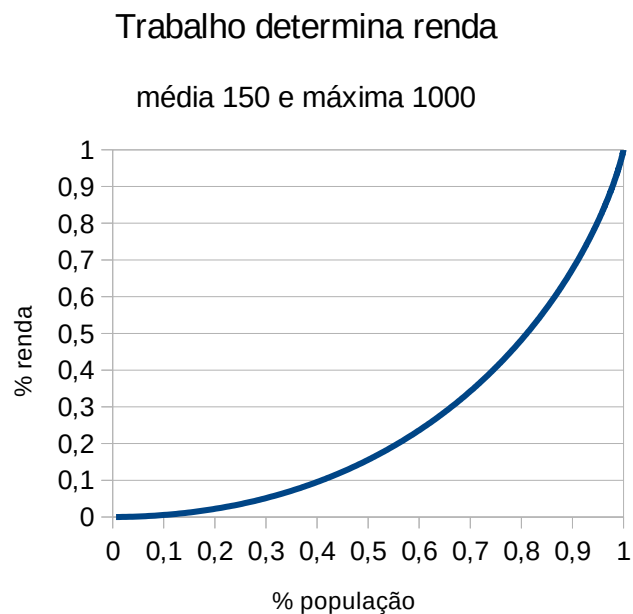
$$G = 1 - A_C / A_L$$

Assim quanto mais igualitária a distribuição, mais as áreas se aproximam e $G \rightarrow 0$. Quando mais concentrada a renda mais A_C diminui, e como A_L é constante, $G \rightarrow 1$.

Vamos mostrar os gráficos das seções 3 e 4 nessa forma e o respectivo coeficiente de Gini.

Exemplo 3.1

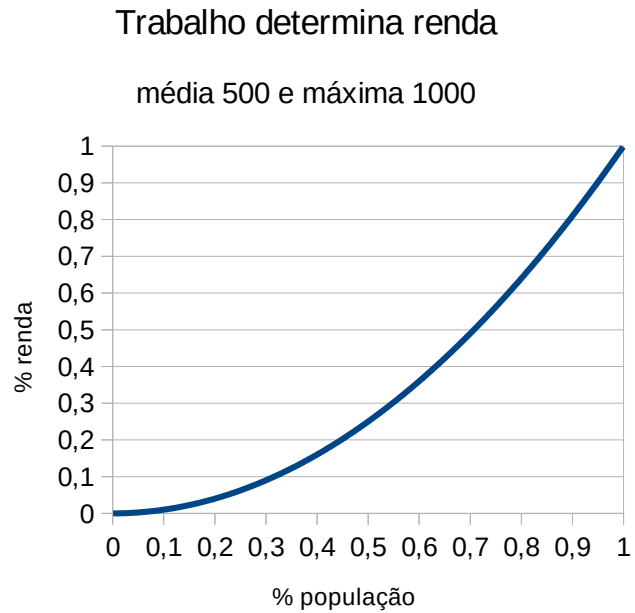
$$G = 0,49$$



Exemplo 3.2

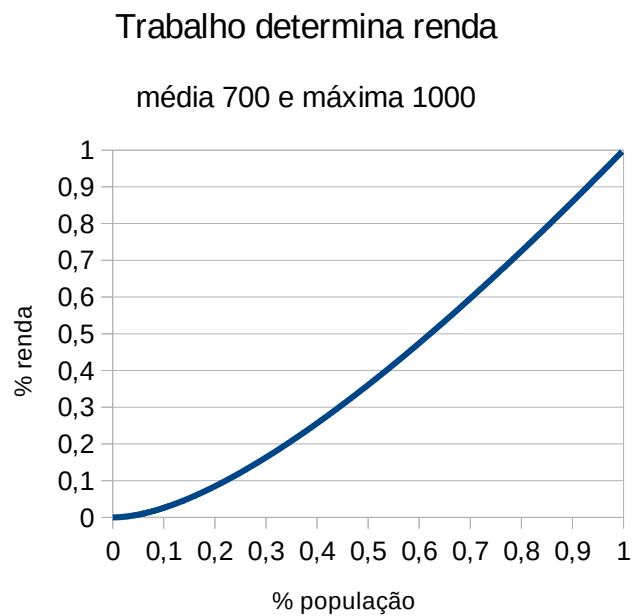
$G = 0,33$

Obs: nesse caso a curva é uma parábola, dado que a distribuição original é linear. Os gráficos de Lorenz são integrais dessas distribuições, por apresentar os valores acumulados.



Exemplo 3.3

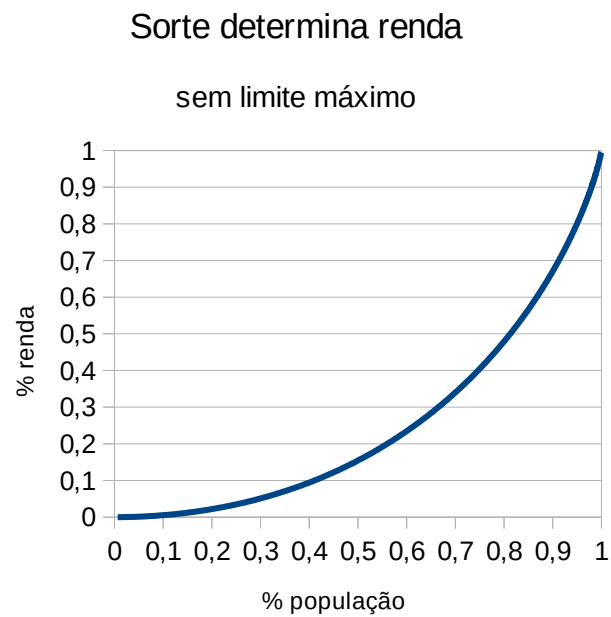
$G = 0,19$



Exemplo 4:

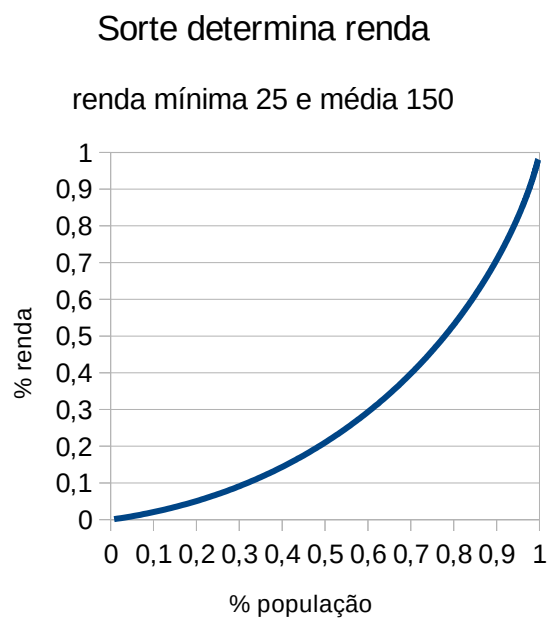
Como vimos, a distribuição é a mesma nessas casos, apenas variando a escala em função da renda média

$G = 0,50$



Exemplo 5.1

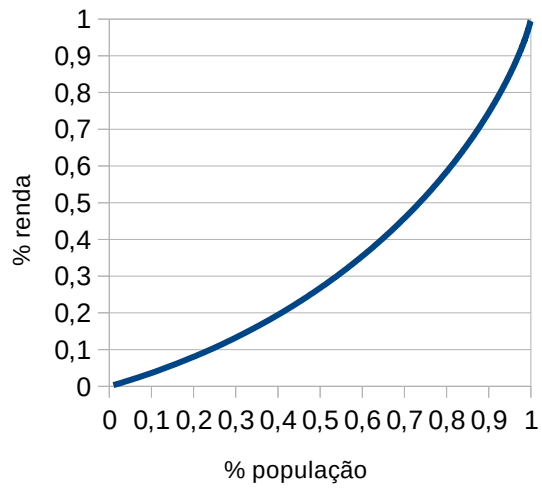
$G = 0,41$



Exemplo 5.2
G = 0,33

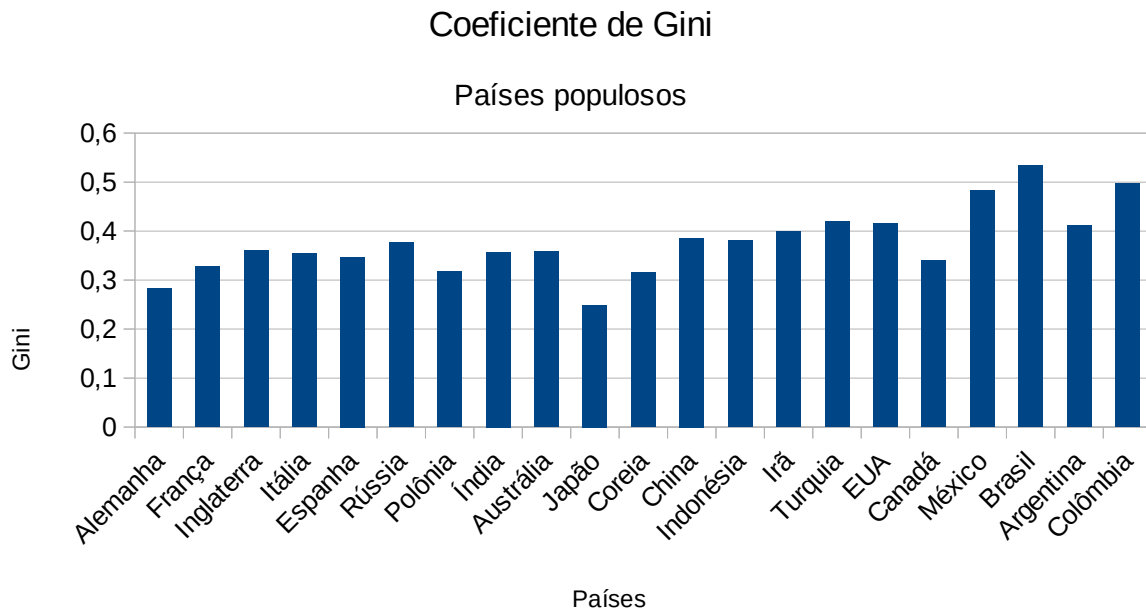
Sorte determina renda

renda mínima 50 e média 150



6) Distribuição real por países

O gráfico abaixo mostra o coeficiente de Gini por um amostragem de países mais populosos.



Exceto pelo Japão, com um índice muito baixo, e os EUA com um índice relativamente mais alto, os países desenvolvidos estão na faixa pouco acima de 0.3, se aproximando do modelo (3.2), onde a renda é definida pelo trabalho, e a renda média é cerca da metade da renda máxima. Essa relação é obviamente irreal, já que mesmo mais igualitários não são tanto assim. O mais provável é que o número de pessoas com renda muito baixa seja menor, dentro de um modelo aleatório, como é o caso do exemplo (5.2).

Já México, Brasil e Colômbia se aproximam mais do modelo aleatório puro (4) onde a renda das pessoas é função do acaso, sem uma garantia de renda mínima, provavelmente devido ao grande número de trabalhadores informais.

Anexo 1

Multiplicadores de Lagrange

Os multiplicadores de Lagrange são usados para maximizar (ou minimizar) uma função f de n variáveis, num domínio restrito por $n-1$ relações entre essas variáveis:

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \dots; g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

A condição para encontrar o(s) pontos extremos é:

$$\partial f / \partial x_1 = \lambda_1 \partial g_1 / \partial x_1 + \lambda_2 \partial g_2 / \partial x_1 \dots + \lambda_{n-1} \partial g_{n-1} / \partial x_1$$

$$\partial f / \partial x_2 = \lambda_1 \partial g_1 / \partial x_2 + \lambda_2 \partial g_2 / \partial x_2 \dots + \lambda_{n-1} \partial g_{n-1} / \partial x_2$$

.

.

.

$$\partial f / \partial x_n = \lambda_1 \partial g_1 / \partial x_n + \lambda_2 \partial g_2 / \partial x_n \dots + \lambda_{n-1} \partial g_{n-1} / \partial x_n$$

ou:

$$\nabla f = \sum \lambda_i \nabla g_i$$

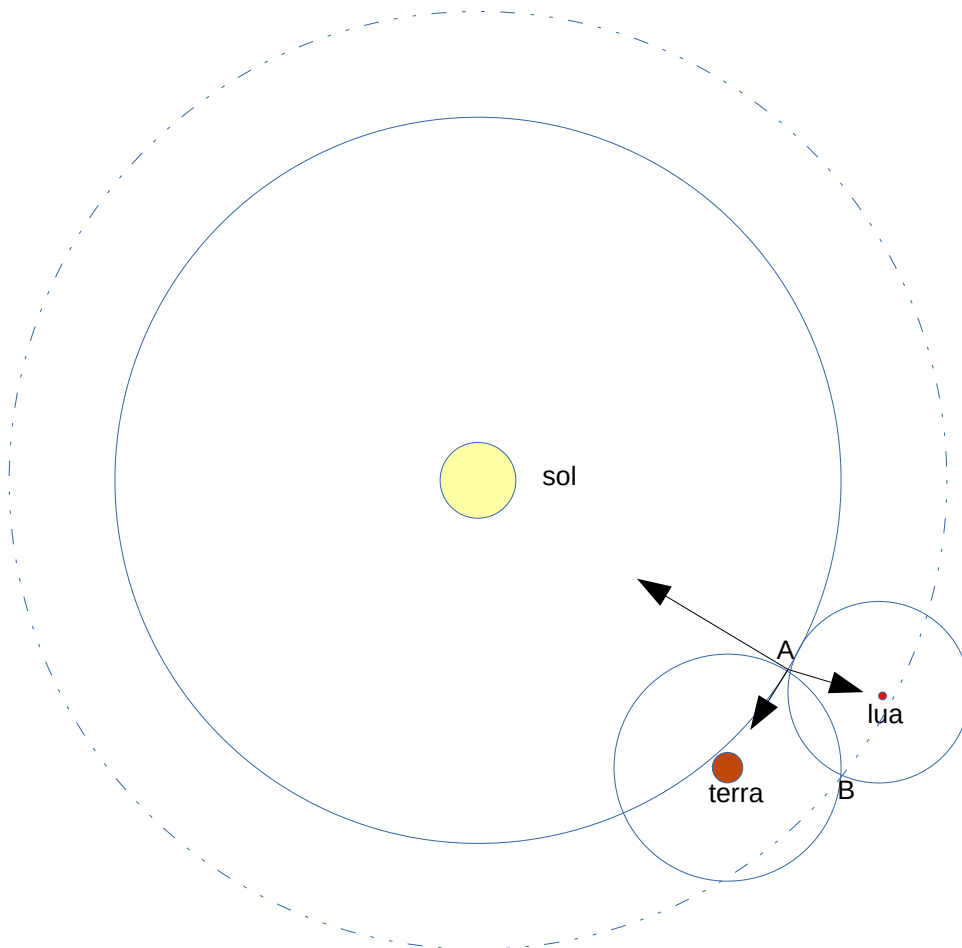
Haverá então n variáveis e $n-1$ lambdas a determinar, com as n equações mostradas acima, além de $n-1$ relações $g_k = 0$.

Para visualizar esse método em 3 dimensões, vamos usar as funções potenciais gravitacionais do Sol, da Terra e da Lua.

A pergunta é: só considerando os pontos do espaço em que o potencial da Terra e da Lua tenham um valor escolhido, qual o ponto de máximo (ou mínimo) do potencial gravitacional do Sol?

Como os 3 centros desses corpos celestes num determinado instante determinam um plano, consideremos que esse é o plano da tela. As funções $P_t(x, y, z) = -GM_t/r$ e $P_l(x, y, z) = -GM_l/r$ são respectivamente os potenciais da Terra e da Lua, onde r é a distância do ponto (x, y, z) até o centro de cada uma.

A função $P_s(x, y, z) = -GM_s/r$ é o potencial do Sol. Para cada valor de r e para cada corpo há uma superfície esférica equipotencial, que cruza o plano da tela como um círculo. Vamos escolher e fixar essas distâncias para o caso da Terra e da Lua, de modo que haja uma intercessão entre as superfícies. Essa intercessão é por sua vez também um círculo, que corta o plano da tela nos pontos A e B.



A figura acima mostra que são exatamente os pontos A e B os de maior e menor potencial em relação à gravidade do Sol, porque são respectivamente o mais próximo e o mais distante entre os que pertencem simultaneamente às esferas equipotenciais da Terra e da Lua.

Agora veremos como isso se relaciona aos multiplicadores de Lagrange.

Para os raios escolhidos,

$$P_t(x,y,z) = -GM_t/r_1 = C_1 \text{ e } P_l(x,y,z) = -GM_l/r_2 = C_2,$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Podemos definir

$$g_1 = P_t(x,y,z) - C_1 \text{ e } g_2 = P_l(x,y,z) - C_2,$$

de modo que para as superfícies esféricas equipotenciais,

$$g_1(x,y,z) = 0 \text{ e } g_2(x,y,z) = 0.$$

A aceleração da gravidade, (representada na figura pelas setas) é o gradiente dessas funções, com sinal negativo:

$$\mathbf{a}_i = -\nabla g_i = -(\partial(-GM_i/r_i)/\partial x + \partial(-GM_i/r_i)/\partial y + \partial(-GM_i/r_i)/\partial z)$$

Sendo:

$$r_i = [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]^{(1/2)}$$

onde x_i , y_i , z_i são as coordenadas do centro do corpo celeste.

$$\partial(1/r_i)/\partial x = -(1/2)[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]^{-3/2}(2(x-x_i)) = -(x-x_i)[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]^{-3/2}$$

Aplicando a derivada em relação a y e z:

$$\mathbf{a}_i = -\nabla g_i = -GM_i[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]^{-3/2} ((x-x_i), (y-y_i), (z-z_i)) = -GM \mathbf{r}_i / |\mathbf{r}_i|^3$$

Portanto \mathbf{a}_i tem a direção de \mathbf{r}_i com sentido para o centro do corpo celeste, e módulo igual a GM/r_i^2 o que nada mais é do que o conceito da gravidade Newtoniana.

De um modo geral, em qualquer ponto do círculo (normal ao plano da tela) em que os potenciais da Terra e da Lua são iguais, os 3 vetores de aceleração do Sol, da Terra e da Lua são linearmente independentes.

Exceto nos 2 pontos A e B em que esse círculo cruza o plano da tela. Aqui os 3 vetores estão no mesmo plano e podemos obter a aceleração do Sol como uma combinação linear das acelerações da Terra e da Lua:

$$\mathbf{a}_s = \lambda_1 \mathbf{a}_t + \lambda_2 \mathbf{a}_l \Rightarrow$$

$$\partial P_s / \partial x = \lambda_1 \nabla g_1 / \partial x + \lambda_2 \nabla g_2 / \partial x$$

$$\partial P_s / \partial y = \lambda_1 \nabla g_1 / \partial y + \lambda_2 \nabla g_2 / \partial y$$

$$\partial P_s / \partial z = \lambda_1 \nabla g_1 / \partial z + \lambda_2 \nabla g_2 / \partial z$$

ou:

$$\nabla P_s = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \text{ ou}$$

Adicionando $g_1(x,y,z) = 0$ e $g_2(x,y,z) = 0$, temos 5 equações para 5 incógnitas, x, y, z, λ_1 e λ_2 , exatamente o que estabelece o princípio dos multiplicadores de Lagrange.

O exemplo ilustra duas conclusões importantes:

- 1) Supõe-se que existam pontos que satisfaçam todas as relações g_i , caso contrário o problema não tem solução.
- 2) O ponto encontrado pode ser máximo ou mínimo, o que pode ser verificado testando na função f .

Observação:

Como visto acima, o método dos multiplicadores de Lagrange pode ser visto como um procedimento para encontrar os valores de λ_i e \mathbf{x} , para os quais uma função vetorial, combinação linear dos vetores gradiente seja nula:

$$0 = \varphi(\mathbf{x}) = \nabla(f - \sum \lambda_i g_i) = \nabla f - \sum \lambda_i \nabla g_i$$

dada uma função $F = h(f(\mathbf{x}))$ em que h seja definida em todo o domínio de f ,

$$\nabla F = \nabla h(f(\mathbf{x})) = ((\partial h / \partial f)(\partial f / \partial x), (\partial h / \partial f)(\partial f / \partial y), \dots) = (\partial h / \partial f) \nabla f$$

Se definirmos uma função:

$$\varphi'(\mathbf{x}) = (\partial h / \partial f) \nabla f - \sum (\partial h / \partial f) \lambda_i \nabla g_i = (\partial h / \partial f) \varphi(\mathbf{x})$$

Se $\varphi'(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) = 0$, desde que $\partial h / \partial f$ não se anule no ponto.

Portanto é possível encontrar o valor extremo de f sob as restrições g_i , substituindo f por F . Nesse caso os valores dos multiplicadores serão:

$$\lambda_i' = (\partial h / \partial f) \lambda_i$$

Exemplo:

Função a ser maximizada:

$$f = xy, \text{ para } x, y > 0.$$

Restrição:

$$y = 1 - x \Rightarrow$$

$$g = y + x - 1$$

1) minimizar f diretamente por multiplicadores de Lagrange:

$$f_{,x} + \lambda g_{,x} = 0 \Rightarrow y + \lambda = 0$$

$$f_{,y} + \lambda g_{,y} = 0 \Rightarrow x + \lambda = 0$$

$$y = 1 - x$$

$$1 - x + \lambda = 0$$

$$x + \lambda = 0$$

$$\lambda = -1/2 \Rightarrow x = 1/2 \text{ e } y = 1/2$$

2) Minimizar f , através de uma função $F(f)$:

$$F = \log f = \log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$F_{,x} = 1/x$$

$$F_{,y} = 1/y$$

$$F_{,x} + \lambda g_{,x} = 0 \Rightarrow 1/x + \lambda = 0$$

$$F_{,y} + \lambda g_{,y} = 0 \Rightarrow 1/y + \lambda = 0$$

$$y = 1 - x$$

$$1/x + \lambda = 0$$

$$1/(1-x) + \lambda = 0 \Rightarrow 1 / (1 + 1/\lambda) + \lambda = 0 \Rightarrow 1 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

$$\Rightarrow x = 1/2 \text{ e } y = 1/2$$

A solução é válida já que:

$$F(1/2, 1/2) = \log(xy) = \log(1/2) + \log(1/2) < 0$$

O valor de λ mudou como previsto em relação ao método direto:

$$\lambda' = (\partial h / \partial f) \lambda = \lambda' = (\partial \log(f) / \partial f) \lambda = (1/f) \lambda = (1/(xy))(-1/2) = (1/(1/4))(-1/2) = -2$$

Anexo 2

Aproximação de Stirling

$f(n) = n!$ é uma função de variável discreta, pois n só assume valores inteiros.

O logaritmo dessa função:

$$\log(f(n)) = \log(n!) = \log(1) + \log(2) + \log(3) + \dots + \log(n)$$

Transforma um produtório num somatório, e sugere a aproximação por uma função contínua:

$$\log(f(x)) = \int_1^n \log(x) dx$$

O resultado da integral é:

$$\log(f(x)) = (x \log(x) - x) \Big|_1^n = n \log(n) - n + 1$$

A aproximação é tanto melhor quanto maiores os valores de n , de modo que o número 1 desaparece.

Exponenciando o resultado:

$$f(x) = n^n \exp(-n)$$

A aproximação para valores grandes de n é então:

$$n! \sim n^n \exp(-n)$$

Observação:

A aproximação de $\log(n!)$ é adequada, mas a de $n!$ é bem pobre como se pode ver para baixos valores de n . Uma melhor aproximação é dada por:

$$n! \sim (2\pi n)^{(1/2)} n^n \exp(-n)$$

Ex:

| | | |
|-------------------|---|--------------------------------|
| $3! = 6$ | $(2\pi \cdot 3)^{(1/2)} 3^3 \exp(-3) = 5,8$ | $3^3 \exp(-3) = 1,3$ |
| $6! = 720$ | $(2\pi \cdot 6)^{(1/2)} 6^6 \exp(-6) = 709,8$ | $6^6 \exp(-6) = 115,6$ |
| $12! = 479001600$ | $(2\pi \cdot 12)^{(1/2)} 12^{12} \exp(-12) = 475687486$ | $12^{12} \exp(-12) = 54782414$ |

Entretanto, comparando os logaritmos das aproximações:

$$\log((2\pi n)^{(1/2)} n^n \exp(-n)) = (1/2)\log(2\pi) + (1/2)\log(n) + n \log(n) - n$$

Quando $n \rightarrow \infty$ os termos $(1/2)\log(2\pi) + (1/2)\log(n)$ ficam desprezíveis em relação aos termos $n \log(n) - n$. Isso significa que o erro relativo tende a zero. Entretanto o erro em si aumenta, pois é função de $n^{(1/2)}$. Daí que o erro relativo da (primeira) aproximação de $n!$ não diminua com n :

$$n = 100 \Rightarrow (1/2)\log(2\pi) + (1/2)\log(100) + 100\log(100) - 100 = 363,74$$

$$n = 100 \Rightarrow 100\log(100) - 100 = 360,52$$

$$\exp(363,74 - 360,52) = \exp(3,22) = 25$$

$$n = 1000 \Rightarrow (1/2)\log(2\pi) + (1/2)\log(1000) + 1000\log(1000) - 1000 = 5912,5$$

$$n = 1000 \Rightarrow 1000\log(1000) - 1000 = 5907,8$$

$$\exp(5912,5 - 5907,8) = \exp(4,7) = 110$$