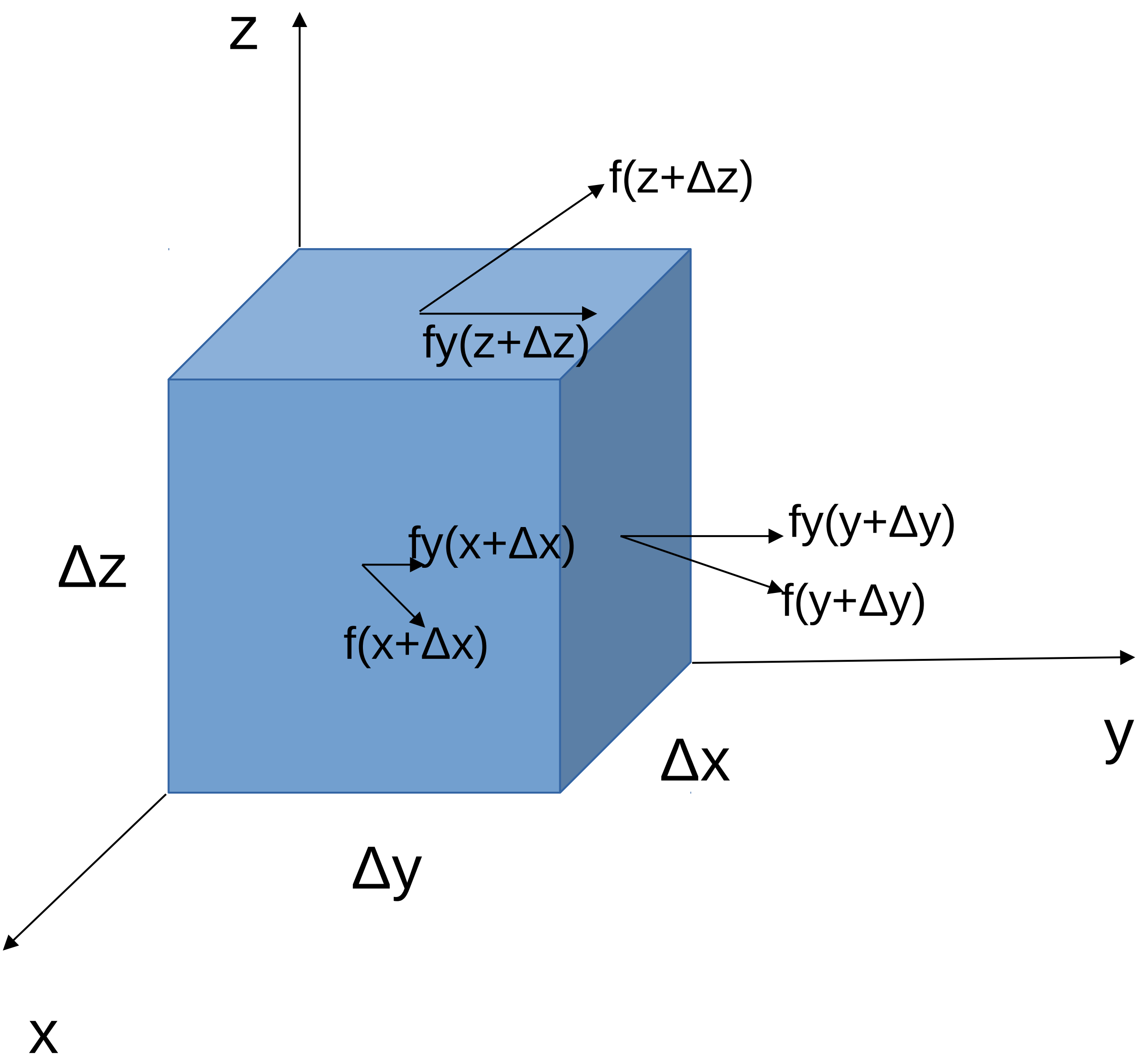
Elementos finitos em teoria da elasticidade

1) Dedução do sistema de equações diferenciais para sólidos deformados no regime elástico.

Um sólido em repouso, mas deformado elasticamente em função de forças aplicadas, tem o somatório de forças aplicadas iguais a zero, já que não está em movimento acelerado. Se imaginarmos um cubo pequeno tendo sido cortado em seu interior e levado para fora, será necessário aplicar forças nas 6 faces desse cubo para simular a sua condição tensionada dentro do sólido. Esse equilíbrio de forças pode ser expresso pela soma vetorial:



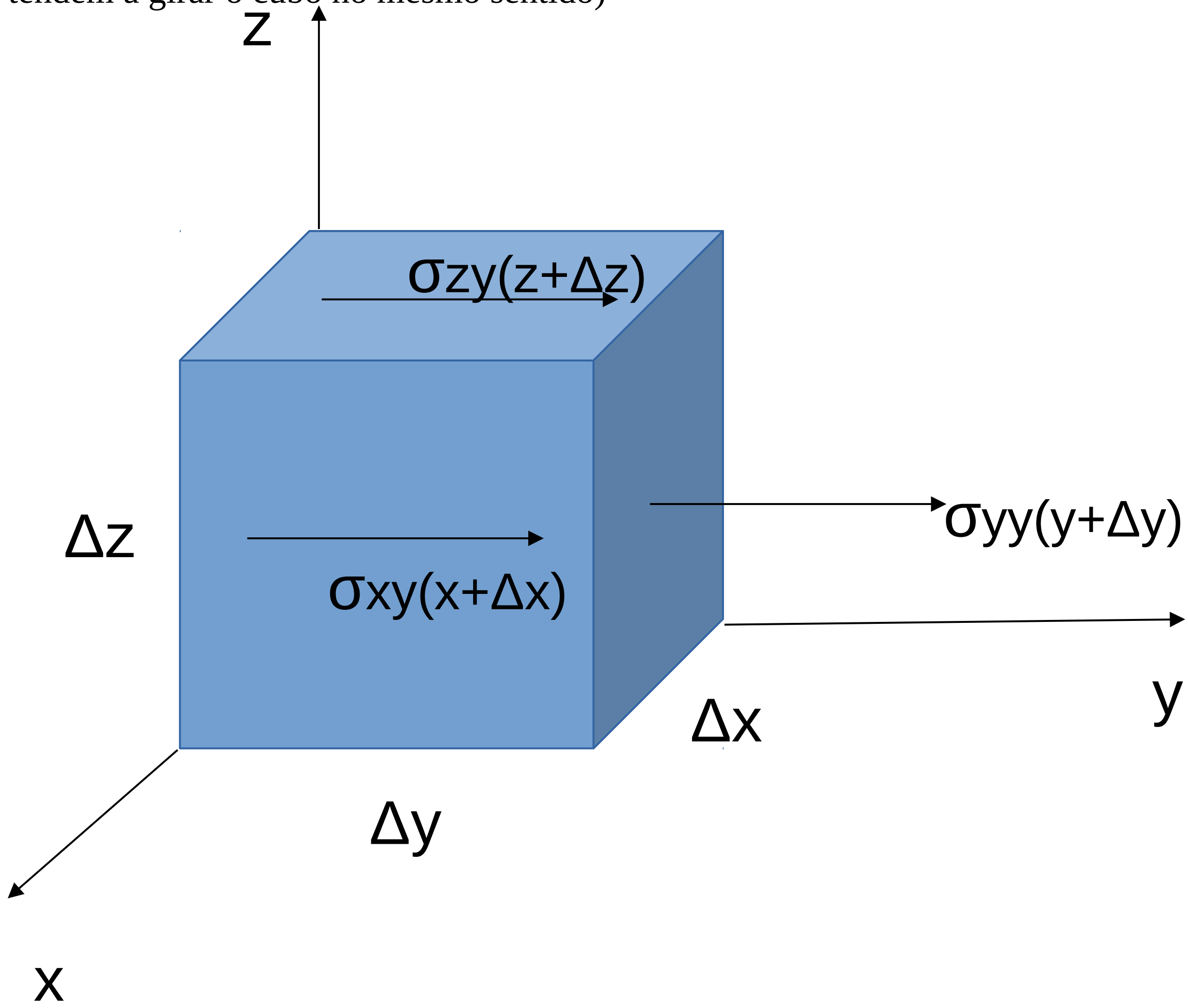
$\mathbf{f_{x+\Delta x} + f_x + f_{y+\Delta y} + f_y + f_{z+\Delta z} + f_z + P} = 0$

onde P é alguma força inercial agindo sobre o volume do material, tipicamente a força da gravidade, ou seja o peso próprio do sólido.

Separando os componentes dessas forças nas direções dos eixos coordenados:

$$f_{x(x+\Delta x)} + f_{x(x)} + f_{x(y+\Delta y)} + f_{x(y)} + f_{x(z+\Delta z)} + f_{x(z)} + P_x = 0$$
$$f_{y(x+\Delta x)} + f_{y(x)} + f_{y(y+\Delta y)} + f_{y(y)} + f_{y(z+\Delta z)} + f_{y(z)} + P_y = 0$$
$$f_{z(x+\Delta x)} + f_{z(x)} + f_{z(y+\Delta y)} + f_{z(y)} + f_{z(z+\Delta z)} + f_{z(z)} + P_z = 0$$

Exprimindo as forças como tensões nas faces do cubo multiplicadas pela área de cada face: (As tensões normais de tração são consideradas positivas. As tensões cizalhantes de faces opostas tem o mesmo sinal se tendem a girar o cubo no mesmo sentido)



$\sigma_{xx}(x+\Delta x).\Delta y.\Delta z - \sigma_{xx}(x).\Delta y.\Delta z + \sigma_{yx}(y+\Delta y).\Delta x.\Delta z - \sigma_{yx}(y).\Delta x.\Delta z + \sigma_{zx}(z+\Delta z).\Delta y.\Delta x - \sigma_{zx}(z).\Delta y.\Delta x + P_x = 0$

$\sigma_{yy}(y+\Delta y).\Delta x.\Delta z - \sigma_{yy}(y).\Delta x.\Delta z + \sigma_{xy}(x+\Delta x).\Delta y.\Delta z - \sigma_{xy}(x).\Delta y.\Delta z + \sigma_{zy}(z+\Delta z).\Delta y.\Delta x - \sigma_{zy}(z).\Delta y.\Delta x + P_y = 0$

$\sigma_{zz}(z + \Delta z).\Delta x.\Delta y - \sigma_{zz}(z).\Delta x.\Delta y + \sigma_{yz}(y+\Delta y).\Delta z.\Delta x - \sigma_{yz}(y).\Delta z.\Delta x + \sigma_{xz}(x+\Delta x).\Delta y.\Delta z - \sigma_{xz}(x).\Delta y.\Delta z + P_z = 0$

Cada uma dessa equações garante o balanceamento das forças em cada uma das direções coordenadas, mas não garante a ausência de torque. Para isso devemos acrescentar, igualando os momentos em relação ao centro do cubo:

$[\sigma_{yx}(y+\Delta y).\Delta x.\Delta z + \sigma_{yx}(y).\Delta x.\Delta z].\Delta y/2 = [\sigma_{xy}(x+\Delta x).\Delta y.\Delta z + \sigma_{xy}(x).\Delta y.\Delta z].\Delta x/2$
$[\sigma_{zx}(z+\Delta z).\Delta y.\Delta x + \sigma_{zx}(z).\Delta y.\Delta x].\Delta z/2 = [\sigma_{xz}(x+\Delta x).\Delta y.\Delta z + \sigma_{xz}(x).\Delta y.\Delta z].\Delta x/2$
$[\sigma_{zy}(z+\Delta z).\Delta y.\Delta x + \sigma_{zy}(z).\Delta y.\Delta x].\Delta z/2 = [\sigma_{yz}(y+\Delta y).\Delta z.\Delta x + \sigma_{yz}(y).\Delta z.\Delta x].\Delta y/2$

Dividindo as equações pelo volume do cubo ($\Delta x.\Delta y.\Delta z$):
$(\sigma_{xx}(x+\Delta x) - \sigma_{xx}(x)) / \Delta x + (\sigma_{yx}(y+\Delta y) - \sigma_{yx}(y)) / \Delta y + (\sigma_{zx}(z+\Delta z) – \sigma_{zx}(z)) / \Delta z + p_x = 0$

$(\sigma_{yy}(y+\Delta y) - \sigma_{yy}(y)) / \Delta y + (\sigma_{xy}(x+\Delta x) - \sigma_{xy}(x)) / \Delta x + (\sigma_{zy}(z+\Delta z) - \sigma_{zy}(z)) / \Delta z + p_y = 0$

$(\sigma_{zz}(z + \Delta z) - \sigma_{zz}(z)) / \Delta z + (\sigma_{yz}(y+\Delta y) - \sigma_{yz}(y)) / \Delta y + (\sigma_{xz}(x+\Delta x) - \sigma_{xz}(x)) / \Delta x + p_z = 0$

e,
$(\sigma_{yx}(y+\Delta y) + \sigma_{yx}(y)) / 2 = (\sigma_{xy}(x+\Delta x) + \sigma_{xy}(x)) / 2$
$(\sigma_{zx}(z+\Delta z) + \sigma_{zx}(z)) / 2 = (\sigma_{xz}(x+\Delta x) + \sigma_{xz}(x)) / 2$
$(\sigma_{zy}(z+\Delta z) + \sigma_{zy}(z)) / 2 = (\sigma_{yz}(y+\Delta y) + \sigma_{yz}(y)) / 2$

Quando o cubo tende a zero:

$\partial\sigma_{xx} / \partial x + \partial\sigma_{yx} / \partial y + \partial\sigma_{zx} / \partial z + p_x = 0$
$\partial\sigma_{yy} / \partial y + \partial\sigma_{xy} / \partial x + \partial\sigma_{zy} / \partial z + p_y = 0$
$\partial\sigma_{zz} / \partial z + \partial\sigma_{yz} / \partial y + \partial\sigma_{xz} / \partial x + p_z = 0$
e
$\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$
$\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$
$\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$

Se as forças inerciais são muito pequenas em comparação às demais forças aplicadas:

(1.1)
$\partial\sigma_{xx} / \partial x + \partial\sigma_{yx} / \partial y + \partial\sigma_{zx} / \partial z = 0$
$\partial\sigma_{yy} / \partial y + \partial\sigma_{xy} / \partial x + \partial\sigma_{zy} / \partial z = 0$
$\partial\sigma_{zz} / \partial z + \partial\sigma_{yz} / \partial y + \partial\sigma_{xz} / \partial x = 0$

Pela definição de divergência de um tensor, essas 3 equações equivalem a: div $\boldsymbol{\sigma} = 0$.

Pelo teorema da divergência para tensores de segunda ordem:

$\int_v \text{div}\, \boldsymbol{\sigma}\, dv = \int_s \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}\, ds$, onde s é a área externa do sólido deformado, ou

$\int_v (\partial\sigma_{xx} / \partial x + \partial\sigma_{yx} / \partial y + \partial\sigma_{zx} / \partial z)\, dv = \int_s (n_x.\sigma_{xx} + n_y.\sigma_{yx} + n_z.\sigma_{zx})\, ds$
$\int_v (\partial\sigma_{yy} / \partial y + \partial\sigma_{xy} / \partial x + \partial\sigma_{zy} / \partial z)\, dv = \int_s (n_x.\sigma_{yy} + n_y.\sigma_{xy} + n_z.\sigma_{zy})\, ds$
$\int_v (\partial\sigma_{zz} / \partial z + \partial\sigma_{yz} / \partial y + \partial\sigma_{xz} / \partial x)\, dv = \int_s (n_x.\sigma_{zz} + n_y.\sigma_{yz} + n_z.\sigma_{xz})\, ds$

Esse resultado será útil mais adiante.

Como a deformação é elástica, as tensões são proporcionais às deformações: $\sigma = E.\varepsilon$.
No caso unidimensional, E é o módulo de elasticidade do material, e $\varepsilon = du/dx$, (diferença entre a distância entre 2 pontos próximos na condição deformada e essa distância na condição original, sendo esse resultado dividido pela distância entre eles na condição original).
No caso tridimensional, **E** é um tensor (de 4ª ordem) de proporcionalidade entre o tensor de tensões e o tensor de deformações (cada um desses de 2ª ordem). Para o caso de materiais isotrópicos como os metais, o tensor **E** reduz-se à apenas 12 componentes diferentes de zero, e sua representação

como uma matriz 6 x 6 é mostrada abaixo:

$$\begin{vmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{vmatrix}$$

Onde λ e μ são constantes características de cada material, e podem ser expressas em termos do módulo de elasticidade (E) e do coeficiente de poisson (ν). Substituindo os σ_{ij} pelo resultado da multiplicação dos tensores na expressão $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}.\boldsymbol{\varepsilon}$:

(1.2)

$\sigma_{xx} = (\lambda+2\mu).\varepsilon_{xx} + \lambda.\varepsilon_{yy} + \lambda.\varepsilon_{zz}$

$\sigma_{yy} = \lambda.\varepsilon_{xx} + (\lambda+2\mu).\varepsilon_{yy} + \lambda.\varepsilon_{zz}$

$\sigma_{zz} = \lambda.\varepsilon_{xx} + \lambda.\varepsilon_{yy} + (\lambda+2\mu).\varepsilon_{zz}$

$\sigma_{xy} = 2.\mu.\varepsilon_{xy}$

$\sigma_{xz} = 2.\mu.\varepsilon_{xz}$

$\sigma_{yz} = 2.\mu.\varepsilon_{yz}$

Substituindo esses valores de tensões nas equações anteriores de equilíbrio:

(1.3) = (1.2 em 1.1)

$\partial [(\lambda+2\mu).\varepsilon_{xx} + \lambda.\varepsilon_{yy} + \lambda.\varepsilon_{zz}] / \partial x + 2.\partial [\mu.\varepsilon_{xy}] / \partial y + 2.\partial [\mu.\varepsilon_{xz}] / \partial z = 0$

$\partial [\lambda.\varepsilon_{xx} + (\lambda+2\mu).\varepsilon_{yy} + \lambda.\varepsilon_{zz}] / \partial y + 2.\partial [\mu.\varepsilon_{xy}] / \partial x + 2.\partial [\mu.\varepsilon_{yz}] / \partial z = 0$

$\partial [\lambda.\varepsilon_{xx} + \lambda.\varepsilon_{yy} + (\lambda+2\mu).\varepsilon_{zz}] / \partial z + 2.\partial [\mu.\varepsilon_{yz}] / \partial y + 2.\partial [\mu.\varepsilon_{xz}] / \partial x = 0$

(1.4) (Definição de cada uma das deformações)

$\varepsilon_{xx} = \partial u_x / \partial x$

$\varepsilon_{yy} = \partial u_y / \partial y$

$\varepsilon_{zz} = \partial u_z / \partial z$

$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy} = (\partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x) / 2$

$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz} = (\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x) / 2$

$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{yz} = (\partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y) / 2$

(1.5) (Substituindo 1.4 em 1.3)

$\partial((\lambda+2\mu).\partial u_x / \partial x + \lambda.\partial u_y / \partial y + \lambda.\partial u_z / \partial z) / \partial x + \mu.\partial(\partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x) / \partial y + \mu.\partial(\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x) / \partial z = 0$

$\partial(\lambda.\partial u_x / \partial x + (\lambda+2\mu).\partial u_y / \partial y + \lambda.\partial u_z / \partial z) / \partial y + \mu.\partial(\partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x) / \partial x + \mu.\partial(\partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y) / \partial z = 0$

$\partial(\lambda.\partial u_x / \partial x + \lambda.\partial u_y / \partial y + (\lambda+2\mu).\partial u_z / \partial z) / \partial z + \mu.\partial(\partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y) / \partial y + \mu.\partial(\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x) / \partial x = 0$

(1.6) (desenvolvendo 1.5)

$(\lambda+2\mu).\partial^2 u_x / \partial x^2 + \lambda.\partial^2 u_y / \partial y\partial x + \lambda.\partial^2 u_z / \partial z\partial x + \mu.(\partial^2 u_x / \partial y^2 + \partial^2 u_y / \partial x\partial y) + \mu.(\partial^2 u_x / \partial z^2 + \partial^2 u_z / \partial x\partial z) = 0$

$\lambda.\partial^2 u_x / \partial x\partial y + (\lambda+2\mu).\partial^2 u_y / \partial y^2 + \lambda.\partial^2 u_z / \partial z\partial y + \mu.(\partial^2 u_x / \partial y\partial x + \partial^2 u_y / \partial x^2) + \mu.(\partial^2 u_y / \partial z^2 + \partial^2 u_z / \partial y\partial z) = 0$

$\lambda.\partial^2 u_x / \partial x\partial z + \lambda.\partial^2 u_y / \partial y\partial z + (\lambda+2\mu).\partial^2 u_z / \partial z^2 + \mu.(\partial^2 u_y / \partial z\partial y + \partial^2 u_z / \partial y^2) + \mu.(\partial^2 u_x / \partial z\partial x + \partial^2 u_z / \partial x^2) = 0$

Chegamos a um sistema de 3 equações diferenciais de segunda ordem para 3 incógnitas: u_x, u_y, u_z, onde cada u_j é função de (x,y,z).

A solução analítica desse sistema não é possível nas situações comuns de engenharia. Os métodos de resíduos ponderados para obter uma solução aproximada, são descrito no capítulo seguinte:

2) Método de resíduos ponderados

Vamos considerar um problema unidimensional, a equação diferencial $d^2y/dx^2 + y = 0$. Uma solução exata é y = sen(x), para as condições de contorno y(0) = 0 e dy/dx(1) = 0,54. Se não soubessemos a solução, e quisessemos uma solução aproximada restrita à um domínio limitado, por exemplo de 0 a 1, uma tentativa seria uma função polinomial como $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde os coeficientes devem ser determinados.
Substituindo na equação diferencial, como a solução não é exata, restará um resíduo: $\psi(a,b,c,d) = 6ax + 2b + ax^3 + bx^2 + cx + d$

O objetivo é que o resíduo seja o menor possível, para isso devo escolher a,b,c e d de modo que ele fique perto de zero no intervalo desejado.
Como, pela condição de contorno y(0) = 0 temos que d = 0.

Como $dy/dx(1) = 0{,}54$:
$0{,}54 = 3a + 2b + c \Rightarrow c = 0{,}54 - 3a - 2b$

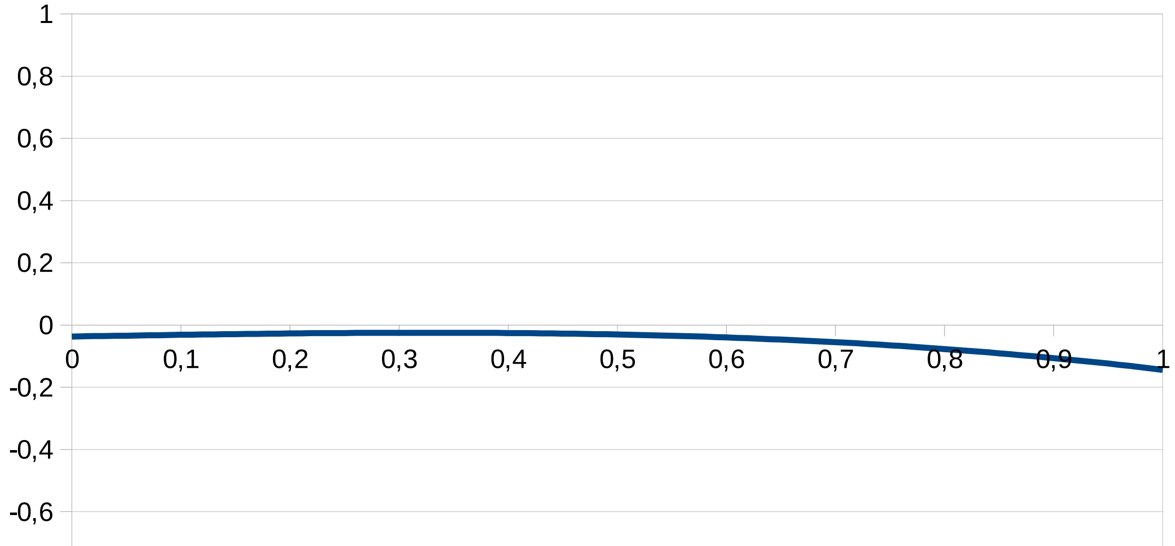
Logo: $\psi(a,b) = 6ax + 2b + ax^3 + bx^2 + (0{,}54 - 3a - 2b)x = 0 \Rightarrow$
$\psi(a,b) = (6x + x^3 - 3x)a + (2 + x^2 - 2x)b + 0{,}54x \Rightarrow$
$\psi(a,b) = (x^3 + 3x)a + (x^2 - 2x + 2)b + 0{,}54x$

Restam 2 incógnitas: a e b.
Evidentemente não há valores de a e b que satisfaçam a exigência do resíduo ser zero em todos os pontos entre 0 e 1.
Entretanto, os valores de a e b tais que os desvios em relação a zero sejam pequenos correspondem a uma solução com melhor aproximação.
Um método simples é escolher 2 valores de x no intervalo, por exemplo 1/3 e 2/3, e encontrar a e b de modo que o resíduo seja zero nesses pontos.
A escolha dos valores de x gera o sistema:

$28/9.a + 13/3.b = -{,}54$
$62/9.a + 10/3.b = -1{,}08$

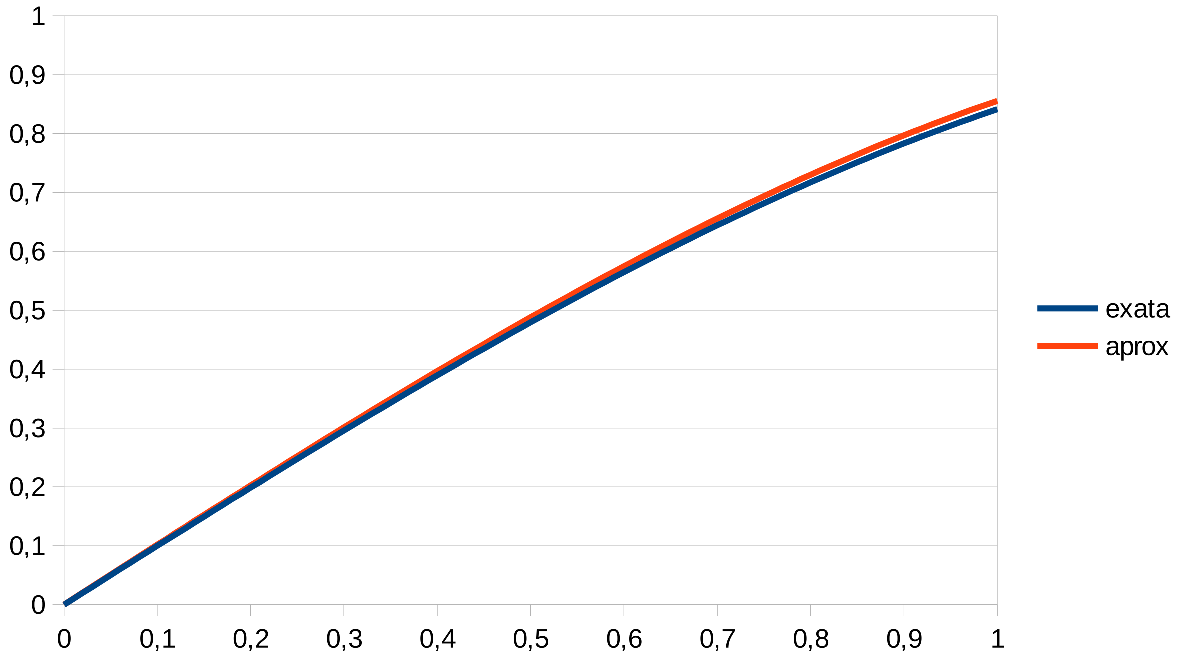
cuja solução é $a = -0{,}148$ e $b = -0{,}019$

Plotando o gráfico do resíduo ao longo do intervalo (0,1) para esses valores de a e b:



Os erros são menores que 0.2, e até bem menores na primeira metade do intervalo.
A função aproximada para esses valores de a e b é:
$y = -0{,}148\, x^3 - 0{,}019\, x^2 + 1{,}022x$ (lembrando que c = c = 0,54 – 3a – 2b)

O gráfico abaixo mostra o alto grau de precisão da aproximação em relação à função exata y = sen(x)



O procedimento descrito acima é conhecido método de colocação.
Um outro procedimento, bem mais complicado e o mais amplamente usado é conhecido como de método de Galerkin:

A idéia aqui, em vez de escolher pontos do intervalo e igualar o resíduo a zero nesses pontos, é escolher funções de x, multiplicar o resíduo por essas funções, e igualar a integral desse produto ao longo do intervalo a zero. No método de Galerkin há um critério para a escolha dessas funções: são as derivadas parciais da função de aproximação em relação a cada um dos parâmetros.
No caso do nosso exemplo:

$y = ax^3 + bx^2 + (0{,}54 - 3.a - 2.b).x$, (já que d=0 e c = 0,54 – 3.a – 2.b)
$y = (x^3 - 3.x).a + (x^2 - 2.x).b + 0{,}54.x$

$dy/da = x^3 - 3.x$, $dy/db = x^2 - 2.x$

$\psi(a,b) = 6ax + 2b + (x^3 - 3.x).a + (x^2 - 2.x).b + 0,54x = (3x+x^3).a + (x^2 - 2.x + 2).b + 0,54.x$

$dy/da \,.\, \psi(a,b) = (x^3 - 3.x).[(3x+x^3).a + (x^2 - 2.x + 2).b + 0,54.x]$
$dy/db \,.\, \psi(a,b) = (x^2 - 2.x).[(3x+x^3).a + (x^2 - 2.x + 2).b + 0,54.x]$

$dy/da \,.\, \psi(a,b) = (x^6 - 9.x^2).a + (x^5 - 5.x^4 + 2.x^3 + 6.x^2 - 6.x).b + 0,54.x^4 – 1,62.x^2$
$dy/db \,.\, \psi(a,b) = (x^5 - 2.x^4 + 3.x^3 - 6.x^2).a + (x^4 - 4.x^3 + 6.x^2 - 4.x).b + 0,54.x^3 – 1,08.x^2$

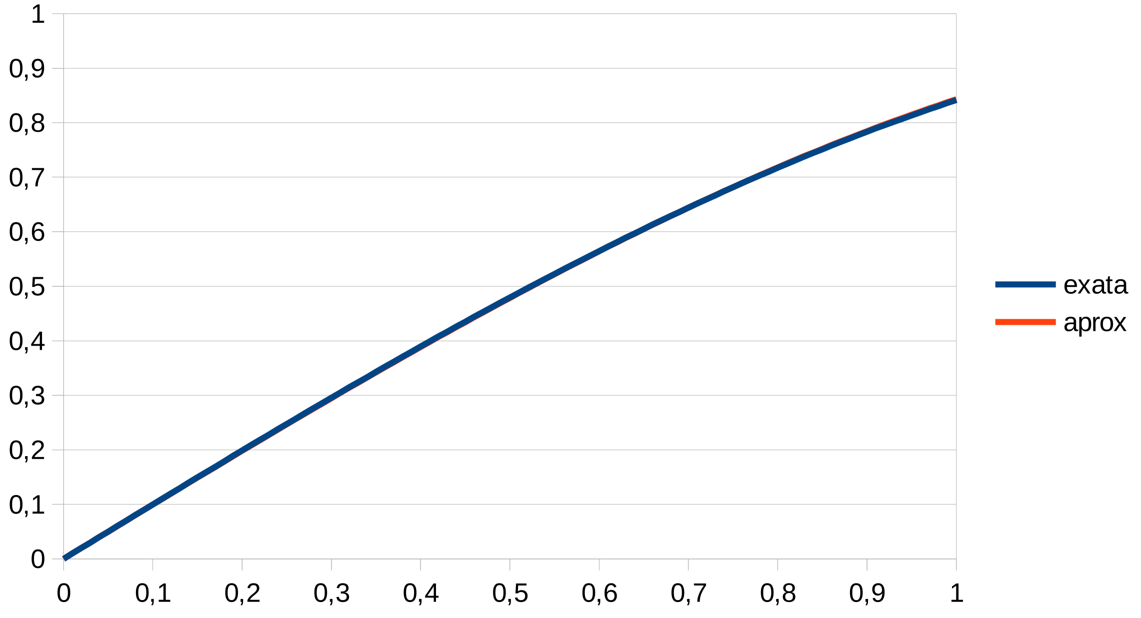
Integrando cada uma dessas funções entre 0 e 1 e igualando a zero,

$(1/7–3).a + (1/6-1+1/2+2-3).b – 0,432 = 0 \Rightarrow 2,85714286.a + 1,33333333.b = -0,432$
$(1/6–2/5+3/4–2).a + (1/5-1+2-2).b – 0,225 = 0 \Rightarrow 1,48333333.a + 0,8.b = -0,225$

$2,85714286.a + 1,33333333.b = -0,432$
$1,48333333.a + 0,8.b = -0,225$

Resolvendo o sistema, e lembrando que $c = 0,54 – 3.a – 2.b$:
$a = -0,148$; $b = -0,007$ e $c = 0,998$

A função aproximada é então $y = -0,148x^3 - 0,007x^2 + 0,998x$
Abaixo a comparação com a função exata, em que a diferença está menor que a espessura da linha:



3) Aplicação do método de Galerkin ao sistema de equações do capítulo 1

(3.1)(Abaixo as soluções aproximadas com 3*m constantes u_j a determinar, sendo N_j funções escolhidas de x,y e z. As funções devem satisfazer as condições de contorno essenciais, por exemplo se $u_x = 0$ para z = 0, então as constantes u_{xj} devem ser tais o somatório seja sempre zero para z = 0)

$$u_x = N_1 * u_{x1} + N_2 * u_{x2} + ...+ \ N_m * u_{xm} = \Sigma\ N_j * u_{xj}$$
$$u_y = N_1 * u_{y1} + N_2 * u_{y2} + ...+ \ N_m * u_{ym} = \Sigma\ N_j * u_{yj}$$
$$u_z = N_1 * u_{z1} + N_2 * u_{z2} + ...+ \ N_m * u_{zm} = \Sigma\ N_j * u_{zj}$$

(3.2) (Aplicando 3.1 em 1.6, como as soluções são aproximadas o resultado não é zero mas um resíduo ψ)

$$(\lambda+2\mu).(\Sigma u_{xj} * \partial^2 N_j / \partial x^2) + \lambda.(\Sigma u_{yj} * \partial^2 N_j / \partial y \partial x + \Sigma u_{zj} * \partial^2 N_j / \partial z \partial x) + \mu. (\Sigma u_{xj} * (\partial^2 N_j / \partial y^2 + \partial^2 N_j / \partial z^2) + \Sigma u_{yj} * \partial^2 N_j / \partial x \partial y + \Sigma u_{zj} * \partial^2 N_j / \partial x \partial z) = \ \psi_1$$

$$(\lambda+2\mu).(\Sigma u_{yj} * \partial^2 N_j / \partial y^2) + \lambda.(\Sigma u_{zj} * \partial^2 N_j / \partial z \partial y + \Sigma u_{xj} * \partial^2 N_j / \partial x \partial y) + \mu. (\Sigma u_{yj} * (\partial^2 N_j / \partial x^2 + \partial^2 N_j / \partial z^2) + \Sigma u_{xj} * \partial^2 N_j / \partial y \partial x + \Sigma u_{zj} * \partial^2 N_j / \partial y \partial z) = \ \psi_2$$

$$(\lambda+2\mu).(\Sigma u_{zj} * \partial^2 N_j / \partial z^2) + \lambda.(\Sigma u_{xj} * \partial^2 N_j / \partial x \partial z + \Sigma u_{yj} * \partial^2 N_j / \partial y \partial z) + \mu. (\Sigma u_{zj} * (\partial^2 N_j / \partial x^2 + \partial^2 N_j / \partial y^2) + \Sigma u_{yj} * \partial^2 N_j / \partial z \partial y + \Sigma u_{xj} * \partial^2 N_j / \partial z \partial x) = \ \psi_3$$

(3.3) (Usando o método de resíduos ponderados de Galerkin, os resíduos são multiplicados por cada um dos N_i, e a integral desse produto por todo o domínio é igualada a zero. Isso gera 3*m equações, para determinar as 3*m constantes uj).

$$(\lambda+2\mu).\int N_i * (\Sigma u_{xj} * \partial^2 N_j / \partial x^2) dxdydz + \lambda.\int N_i * (\Sigma u_{yj} * \partial^2 N_j / \partial y \partial x + \Sigma u_{zj} * \partial^2 N_j / \partial z \partial x) dxdydz + \mu.\int N_i * [(\Sigma u_{xj} * (\partial^2 N_j / \partial y^2 + \partial^2 N_j / \partial z^2) + \Sigma u_{yj} * \partial^2 N_j / \partial x \partial y + \Sigma u_{zj} * \partial^2 N_j / \partial x \partial z)] dxdydz = \ 0$$

$$(\lambda+2\mu).\int N_i * (\Sigma u_{yj} * \partial^2 N_j / \partial y^2) dxdydz + \lambda.\int N_i * (\Sigma u_{zj} * \partial^2 N_j / \partial z \partial y + \Sigma u_{xj} * \partial^2 N_j / \partial x \partial y) dxdydz + \mu.\int N_i * [(\Sigma u_{yj} * (\partial^2 N_j / \partial x^2 + \partial^2 N_j / \partial z^2) + \Sigma u_{xj} * \partial^2 N_j / \partial y \partial x + \Sigma u_{zj} * \partial^2 N_j / \partial y \partial z)] dxdydz = \ 0$$

$(\lambda+2\mu).\int N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial^2 N_j/\partial z^2)dxdydz + \lambda.\int N_i*(\Sigma u_{xj}*\partial^2 N_j/\partial x\partial z + \Sigma u_{yj}*\partial^2 N_j/\partial y\partial z)dxdydz + \mu.\int N_i*[(\Sigma u_{zj}*(\partial^2 N_j/\partial x^2 + \partial^2 N_j/\partial y^2) + \Sigma u_{yj}*\partial^2 N_j/\partial z\partial y + \Sigma u_{xj}*\partial^2 N_j/\partial z\partial x)]dxdydz = 0$

(3.4) (Para eliminar as derivadas de segunda ordem e facilitar a introdução das condições de contorno naturais, faz-se uma integração por partes, lembrando que pela regra da cadeia:)
$\partial(N_i*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial x))/\partial y = N_i*(\Sigma u_{yj}*\partial^2 N_j/\partial x\partial y) + \partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial x)$
$\partial(N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial x))/\partial z = N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial^2 N_j/\partial x\partial z) + \partial N_i/\partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial x)$
$\partial(N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial y))/\partial z = N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial^2 N_j/\partial y\partial z) + \partial N_i/\partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial y)$
$\partial(N_i*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial y))/\partial x = N_i*(\Sigma u_{xj}*\partial^2 N_j/\partial y\partial x) + \partial N_i/\partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial y)$
$\partial(N_i*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial z))/\partial x = N_i*(\Sigma u_{xj}*\partial^2 N_j/\partial z\partial x) + \partial N_i/\partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial z)$
$\partial(N_i*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial z))/\partial y = N_i*(\Sigma u_{yj}*\partial^2 N_j/\partial z\partial y) + \partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial z)$
$\partial(N_i*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial x))/\partial x = N_i*(\Sigma u_{xj}*\partial^2 N_j/\partial x^2) + \partial N_i/\partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial x)$
$\partial(N_i*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial y))/\partial y = N_i*(\Sigma u_{yj}*\partial^2 N_j/\partial y^2) + \partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial y)$
$\partial(N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial z))/\partial z = N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial^2 N_j/\partial z^2) + \partial N_i/\partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial z)$

(3.5) (Substituindo as segundas derivadas em (3.3), e agrupando as integrais de derivadas de um lado, e os produtos de primeiras derivadas do outro lado das equações)

$(\lambda+2\mu).\int[\partial(N_i*(\Sigma ux_j*\partial N_j/\partial x))/\partial x]\,dxdydz + \lambda.\int[\partial(N_i*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial y))/\partial x + \partial(N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial z))/\partial x)]\,dxdydz + \mu.\int[\partial(N_i*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial y))/\partial y + \partial(N_i*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial z))/\partial z) + \partial(N_i*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial x))/\partial y + \partial(N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial x))/\partial z]dxdydz = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i/\partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial x)]dxdydz + \lambda.\int[\partial N_i/\partial x*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial y) + \partial N_i/\partial x*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial z)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial y) + \partial N_i/\partial z*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial z) + \partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial x) + \partial N_i/\partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial x)]dxdydz$

$(\lambda+2\mu).\int[\partial(N_i*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial y))/\partial y]\,dxdydz + \lambda.\int[\partial(N_i*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial x))/\partial y + \partial(N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial z))/\partial y)]\,dxdydz + \mu.\int[\partial(N_i*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial x))/\partial x + \partial(N_i*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial z))/\partial z) + \partial(N_i*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial y))/\partial x + \partial(N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial y))/\partial z]dxdydz = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial y)]dxdydz + \lambda.\int[\partial N_i/$

$\partial y*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial x) + \partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial z)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i/\partial x*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial x) + \partial N_i/\partial z*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial z) + \partial N_i/\partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial y) + \partial N_i/\partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial y)]dxdydz$

$(\lambda+2\mu).\int[\partial(N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial z))/\partial z]\ dxdydz + \lambda.\int[\partial(N_i*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial y))/\partial z + \partial(N_i*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial x))/\partial z)]\ dxdydz + \mu.\int[\partial(N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial y))/\partial y + \partial(N_i*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial x))/\partial x) + \partial(N_i*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial z))/\partial x + \partial(N_i*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial z))/\partial y]dxdydz = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i/\partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial z)]dxdydz + \lambda.\int[\partial N_i/\partial z*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial y) + \partial N_i/\partial z*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial x)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial y) + \partial N_i/\partial x*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial x) + \partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial z) + \partial N_i/\partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial z)]dxdydz$

(3.6)(usando os resultados de (1.4) e (3.1), onde o sublinhado indica a solução aproximada, para diferenciar da exata)

$\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial x = \partial \underline{u}_x/\partial x = \underline{\varepsilon}_{xx}$
$\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial x + \Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial y = \partial \underline{u}_y/\partial x + \partial \underline{u}_x/\partial y = \underline{\varepsilon}_{xy}$
$\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial x + \Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial z = \partial \underline{u}_z/\partial x + \partial \underline{u}_x/\partial z = \underline{\varepsilon}_{xz}$
$\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial y = \partial \underline{u}_y/\partial y = \underline{\varepsilon}_{yy}$
$\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial y + \Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial z = \partial \underline{u}_z/\partial y + \partial \underline{u}_y/\partial z = \underline{\varepsilon}_{yz}$
$\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial z = \partial \underline{u}_z/\partial z = \underline{\varepsilon}_{zz}$

(3.7) (Aplicando 3.6 nas integrais de derivada de 3.5)

$(\lambda+2\mu).\int[\partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{xx})/\partial x]\ dxdydz + \lambda.\int[\partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{yy})/\partial x + \partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{zz})/\partial x)]\ dxdydz + \mu.\int[\partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{xy})/\partial y + \partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{xz})/\partial z)]\ dxdydz = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i/\partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial x)]dxdydz + \lambda.\int[\partial N_i/\partial x*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial y) + \partial N_i/\partial x*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial z)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial y) + \partial N_i/\partial z*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial z) + \partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial x) + \partial N_i/\partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial x)]dxdydz$

$(\lambda+2\mu).\int[\partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{yy})/\partial y]\ dxdydz + \lambda.\int[\partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{xx})/\partial y + \partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{zz})/\partial y)]\ dxdydz + \mu.\int[\partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{xy})/\partial x + \partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{yz})/\partial z)]dxdydz = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j/\partial y)]dxdydz + \lambda.\int[\partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j/\partial x) + \partial N_i/\partial y*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j/\partial z)]dxdydz$

$$+ \mu.\int[\partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial x) + \partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial z) + \partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial y)]dxdydz$$

$$(\lambda+2\mu).\int[\partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{zz}) / \partial z]\, dxdydz + \lambda.\int[\partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{yy}) / \partial z + \partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{xx}) / \partial z)]\, dxdydz + \mu.\int[\partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{yz}) / \partial y + \partial(N_i*\underline{\varepsilon}_{xz}) / \partial x)]dxdydz = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial z)]dxdydz + \lambda.\int [\partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial x)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial x) + \partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial z) + \partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial z)]dxdydz$$

(3.8) (Aplicando a lei de Hooke (1.2) em (3.7))

$$\int[\partial(N_i*\underline{\sigma}_{xx}) / \partial x]\, dxdydz + \int[\partial(N_i*\underline{\sigma}_{xy}) / \partial y]\, dxdydz + \int[\partial(N_i*\underline{\sigma}_{xz}) / \partial z)]\, dxdydz = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial x)]dxdydz + \lambda.\int [\partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial z)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial z) + \partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial x) + \partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial x)]dxdydz$$

$$\int[\partial(N_i*\underline{\sigma}_{yy}) / \partial y]\, dxdydz + \int[\partial(N_i*\underline{\sigma}_{xy}) / \partial x]\, dxdydz + \int[\partial(N_i*\underline{\sigma}_{yz}) / \partial z)]dxdydz = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial y)]dxdydz + \lambda.\int [\partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial x) + \partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial z)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial x) + \partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial z) + \partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial y)]dxdydz$$

$$\int[\partial(N_i*\underline{\sigma}_{zz}) / \partial z]\, dxdydz + \int[\partial(N_i*\underline{\sigma}_{yz}) / \partial y]dxdydz + \int[\partial(N_i*\underline{\sigma}_{xz}) / \partial x)]dxdydz = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial z)]dxdydz + \lambda.\int [\partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial x)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial x) + \partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial z) + \partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial z)]dxdydz$$

(3.9) (Aplicando o teorema da divergência em 3.8)

Forma 1: $\int(N_i*\underline{\sigma}_{xx})dydz + \int(N_i*\underline{\sigma}_{xy})dxdz + \int(N_i*\underline{\sigma}_{xz})dxdy = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial x)]dxdydz + \lambda.\int [\partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial y) + \partial N_i /$

$\partial x*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial z)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial z) + \partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial x) + \partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial x)]dxdydz$

Forma 2: $\int(N_i*\underline{\sigma}_{yy})dxdz + \int(N_i*\underline{\sigma}_{xy})dydz + \int(N_i*\underline{\sigma}_{yz})dxdy = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial y)]dxdydz + \lambda.\int [\partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial x) + \partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial z)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial x) + \partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial z) + \partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial y)]dxdydz$

Forma 3: $\int(N_i*\underline{\sigma}_{zz})dxdy + \int(N_i*\underline{\sigma}_{yz})dxdz + \int(N_i*\underline{\sigma}_{xz})dydz = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial z)]dxdydz + \lambda.\int [\partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial z*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial x)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{zj}*\partial N_j / \partial x) + \partial N_i / \partial y*(\Sigma u_{yj}*\partial N_j / \partial z) + \partial N_i / \partial x*(\Sigma u_{xj}*\partial N_j / \partial z)]dxdydz$

No lado esquerdo da equação, as informações sobre as primeiras derivadas das funções de aproximação (condição natural de contorno) são obtidas desde que sejam conhecidas as distribuições de forças na superfície (integrais da tensão). Isso só é possível devido à relação linear entre o tensor de tensões e o tensor de deformações.

No lado direito, a cada N_i, e a cada uma das 3 formas acima, corresponde uma equação do sistema. Pode-se representar o sistema como o produto de uma matriz A (3*m x 3*m) pelo vetor U ($u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{z2} \ldots u_{xm}, u_{ym}, u_{zm}$) resultando no “vetor de forças” F (integrais de Ni*σ.ds).

As linhas 1, 4, 7...3*i – 2...3*m - 2 da matriz são expressas pela forma 1 acima. As linhas 2, 5, 8...3*i – 1...3*m - 1 são expressas pela forma 2. E as linhas 3, 6, 9...3*i...3*m são expressas pela forma 3. As colunas 1, 4, 7, ...3*j – 2 correspondem aos termos em u_{xj}. As colunas 2, 5, 8,... 3*j – 1 correspondem aos termos em u_{yj} e as colunas 3, 6, 9, 3*j correspondem aos termos em u_{zj}. Assim por exemplo, para a posição $A_{5,7}$, i = 2, usa-se a forma 2 e j = 3, aparecem apenas as integrais que multiplicam u_{x3}:

$\lambda.\int [\partial N_2 / \partial y*\partial N_3 / \partial x]dxdydz + \mu.\int[\partial N_2 / \partial x*\partial N_3 / \partial y]dxdydz$. Na multiplicação A.U, esse termo multiplica o sétimo termo do vetor U, que é u_{x3}. Por isso foram selecionadas apenas as integrais contendo u_{xj} e apenas o termo do somatório onde j = 3.

Para o termo $A_{7,5}$, i = 3 e usa-se a forma 1 e j = 2 onde aparecem apenas as integrais em u_{y2}.

$\lambda.\int [\partial N_3 / \partial x * \partial N_2 / \partial y]dxdydz + \mu.\int[\partial N_3 / \partial y * \partial N_2 / \partial x]dxdydz$

Como se pode ver, as expressões são idênticas. Pode ser verificado que a matriz é simétrica, ($A_{k,l} = A_{l,k}$) para todos os k e l.

De modo geral, temos as seguintes possibilidades para $A_{k,l}$:

k = 3*i – 2 e l = 3*j – 2:
$A_{k,l} = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial x)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial z * \partial N_j / \partial z)]dxdydz$

k = 3*i – 2 e l = 3*j – 1:
$A_{k,l} = \lambda.\int [\partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial y)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial x)]dxdydz$

k = 3*i – 2 e l = 3*j:
$A_{k,l} = \lambda.\int [\partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial z)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial z * \partial N_j / \partial x)]dxdydz$

k = 3*i – 1 e l = 3*j - 2:
$A_{k,l} = \lambda.\int [\partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial x)dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial y)]dxdydz$

k = 3*i – 1 e l = 3*j - 1:
$A_{k,l} = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial y)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial x) + \partial N_i / \partial z * \partial N_j / \partial z)]dxdydz$

k = 3*i – 1 e l = 3*j:
$A_{k,l} = \lambda.\int[\partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial z)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial z * \partial N_j / \partial y)]dxdydz$

k = 3*i e l = 3*j - 2:
$A_{k,l} = \lambda.\int [\partial N_i / \partial z * \partial N_j / \partial x)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial z)]dxdydz$

k = 3*i e l = 3*j - 1:
$A_{k,l} = \lambda.\int [\partial N_i / \partial z * \partial N_j / \partial y)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial z)]dxdydz$

k = 3*i e l = 3*j:
$A_{k,l} = (\lambda+2\mu).\int[\partial N_i / \partial z * \partial N_j / \partial z)]dxdydz + \mu.\int[\partial N_i / \partial y * \partial N_j / \partial y) + \partial N_i / \partial x * \partial N_j / \partial x)]dxdydz$